Structures métriques, espaces complets, connexité

■ Structures métriques

Exercice 1 -

i. Montrer que les distances suivantes de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes,

$$d_1(x,y) = \sum |x_i - y_i| \quad d_2(x,y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2} \quad d_\infty(x,y) = Sup(|x_i - y_i|)$$

ii. Montrer que des distances équivalentes définissent les mêmes topologies.
En déduire que $\mathbb{C}$ muni de la topologie usuelle et $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie produit sont homéomorphes.

iii. Discuter de la réciproque en considérant $\mathbb{R}+^*$ muni de la distance d_2 et de la distance,

$$d(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$$

iv. Montrer que les distances suivantes définissent des topologies différentes sur $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$,

$$d_1(f,g) = \textstyle\int_I |f(x) - g(x)| dx \quad d_\infty(f,g) = Sup_I |f(x) - g(x)|$$

■ Espaces complets

Exercice 1 - *Prolégomènes*

i. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

ii. Montrer qu'une suite de Cauchy possèdant une valeur d'adhérence est convergente.

iii. *Application :* montrer que les espaces métriques compacts sont complets.

Exercice 2 - *Exemples*

Les espaces suivants sont-ils complets pour la distance usuelle ?

$$]0,1], \ [0,1], \ \mathbb{Q}, \ \mathbb{R}, \ \mathbb{Z}$$

Exercice 3 - *Isomorphisme de structure*

i. Les homéomorphies respectent-elles la complétude ?

ii. Soit $f : X \to Y$. Montrer que si f est une homéomorphie et uniformément continue, elle transporte la complétude de Y à X.

Exercice 4 - *Un classique*

Soit X espace topologique quelconque, et Y complet.
On note $\mathcal{B}(X,Y)$ l'espace des fonctions bornées.

i. Montrer que $(\mathcal{B}(X,Y), || \ ||_\infty)$ est complet.

ii. Montrer que $(\mathcal{C}(X,Y), || \ ||_\infty)$ est fermé dans le précédent.

iii. En déduire que $\mathcal{C}(X,Y)$ est complet.

■ Théorèmes de point fixe

Exercice 1 - *Espace compact*
Soit E espace compact, $f : E \to E$ application vérifiant $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.
Montrer que f admet un unique point fixe sur E.

Exercice 2 - *Espace métrique complet*
Considérant (E, d) espace métrique complet, et $f : E \to E$ une application continue k-lipschitzienne contractante, *ie* vérifiant la propriété,

$$\exists\ k > 1\ \forall x, y \in E\ d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

i. Montrer qu'il existe un point fixe dans E pour f.
ii. L'hypothèse affaiblie $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ est-elle suffisante ?

Exercice 3 -
On considère $E = (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), ||\ ||_\infty)$ et $g \in E$ vérifiant $||g||_\infty < \frac{1}{4}$.
On veut montrer qu'il existe une solution $f \in E$ à l'équation ,

$$2f(t) - f(t)^2 + f(t^2) = g(t)$$

i. On considére $\phi : E \to E$ définie par,

$$\phi(f)(t) = \frac{1}{2}(f(t) - f(t)^2 + f(t^2) + g(t))$$

Montrer que pour tout $a > 0$, ϕ est $(a + \frac{1}{2})$-lipschitzienne sur la boule $B(0, a)$.
ii. Montrer que l'on peut trouver $a < \frac{1}{2}$ tel que ϕ conserve $B(0, a)$.
iii. Conclure en appliquant le théorème du point fixe.

■ Connexité

Exercice 1 -
Soit X espace métrique.

i. Montrer que X est connexe si et seulement si toute application continue $f : X \to \{0, 1\}$ est constante.
ii. *Application :* montrer que la réunion de deux espaces connexes d'intersection non vide est connexe.

Exercice 2 -
Soit (E, d) espace métrique, A partie connexe de E. On considère B partie de E vérifiant $A \subset B \subset \overline{A}$. Montrer que B est connexe.

Exercice 3 - *Connexité par arc*

i. Montrer que la connexité par arc implique la connexité.

ii. Montrer que la fermeture dans $\mathbb{R}^2$ du graphe de la fonction suivante est connexe et non connexe par arc,

$$\begin{array}{rcl} f \ : \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & sin(1/x) \end{array}$$

Exercice 4 -

Utilisant un critère de connexité, montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 5 - *Un théorème de Darboux*

Soit I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, de dérivée non continue. Nous allons montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

i. Montrer que l'ensemble Γ suivant est connexe,

$$\Gamma = \{\frac{f(x) - f(y)}{x - y} | x, y \in I^2 \ et \ x < y\}$$

ii. Montrer que $\Gamma \subset f'(I) \subset \overline{\Gamma}$

iii. Conclure.