Topologies, intérieur, continuité

■ Quelques topologies

Exercice 1 - *Topologie métrique*
Soit (E, d) un espace métrique. On définit les ouverts U par la propriété suivante,

$$U \text{ ouvert si } \forall x \in U \exists r > 0 B(x,r) \subset U$$

Vérifier qu'ils méritent bien le nom d'ouvert et vérifient les axiomes des ouverts d'une topologie.

Exercice 2 - *Topologie abstraite*
Soit l'espace $E = \{1, 2, 3\}$. Donnez des exemples de parties de parties de E qui soient des topologies.

Exercice 3 - *Topologie ultramétrique*
Soit (E, d) espace topologique métrique vérifiant,

$$\forall x, y, z \in E \; d(x,z) \leq sup(d(x,y), d(y,z))$$

i. Montrer que tout triangle est isocèle
ii. En déduire que tout point d'une boule ouverte est son centre
iii. Montrer que deux boules sont soient d'intersection nulle, soit incluse l'une dans l'autre
iv. Montrer que toute boule est ouverte et fermée
v. Définissant la circonférence d'une boule $Cir(a,r) = \{x \in E | d(a,x) = r\}$, montrer qu'elle est réunion de boules ouverte. Comparer avec la frontière d'une boule ouverte.

Les espaces topologiques ultramétriques existent. Pour preuve, considérez p premier et la valuation associée v_p. Vérifier que l'espace $(\mathbb{Q}, |x|_p = p^{-v_p(x)})$ est un espace topologique ultramétrique.

Exercice 4 - *Topologie des cofinis*
Considérons $\mathbb{R}$ ainsi que l'ensemble $\mathcal{T} = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) | X \; finie \; ouX = \mathbb{R}\}$.

i. Vérifier que $\mathcal{T}$ munit $\mathbb{R}$ d'une topologie définie par ses fermés
ii. Etudiez la séparation de cet espace. Quels sont les sous-espaces séparés ?
iii. Quelle sont les suites convergentes de cet espace ?
iv. Montrer que les fonction continues de cet espace dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle sont les fonctions constantes

■ Intérieur et adhérence

Exercice 1 - *Prolégomènes*
Par la suite, on considère $A, B \subset E$ sous-ensembles d'un espace topologique.

i. Montrer que $\overline{A^c} = (\mathring{A})^c$
ii. Comparer les ensembles suivants

$$\overline{A \cup B} \ et \ \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} \ et \ \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \ et \ \mathring{A} \cup \mathring{B}, \quad \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \ et \ \mathring{A} \cap \mathring{B}$$

iii. Vérifier que $Fr(A) = \overline{A}/\mathring{A}$

Exercice 2 -
Déterminer les adhérences et intérieurs des sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants,

$$A_1 = \{(x, y) | 0 < x < 1 \ et \ O \leq y < 1\} \quad A_2 = \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$
$$A_3 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 4\} \cap \mathbb{Q}$$

Exercice 3 - *Les singletons sont-ils toujours fermés ?*
Montrer que si E est un espace séparé, les singletons sont intersection de leurs voisinages fermés. En déduire que les singletons sont fermés. Donner un contre exemple à la réciproque.
Donner un exemple d'espace topologique dans lesquels les singletons ne sont pas fermés.

■ Application continues, homéomorphismes

Exercice 1 - *Gymnastique*

i. Soient $f : X \to Y$ application continue entre deux espaces topologiques.
Vérifier que f est continue si et seulement si $\forall A \subset E \ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$
ii. Appliquant la définition de la continuité aux espaces métriques, retrouver la continuité des fonctions numériques.

Exercice 2 - *Normalité des espaces métriques*
soit (E, d) espace métrique, $A \subset E$ non-vide.
Pour $x \in E$ on définit $d(x, A) = \underset{y \in A}{inf} \ d(y, x)$

i. Montrer que l'application suivante est continue,

$$d_A : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & d(x, A) \end{array}$$

ii. Soient F, G fermés disjoints de E.
Montrer qu'il existe une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$ qui vallant 0 sur F et 1 sur G.
En déduire deux ouverts disjoints U et V tels que $F \subset U$ et $G \subset V$.

Exercice 3 - *Sphère et plan*
Considérant la sphère unitée $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

i. Soient $P, Q \in \mathbb{S}^2$, montrer que $\mathbb{S}^2 - \{P\} \simeq \mathbb{S} - \{Q\}$
ii. Soit $P = (0, 0, 1)$. Montrer que $\mathbb{S}^2 - \{P\} \simeq \mathbb{R}^2$.

Exercice 4 -
Classifier les intervalles de $\mathbb{R}$ à homéomorphisme près.