Extrema liés, multiplicateurs de Lagrange

Exercice 1 -

i. Rappeler une condition nécessaire du premier ordre pour trouver les extrema libre d'une fonction différentiable.
Pourquoi ne pas l'appliquer aux extrema liés ?

ii. Donner une interprétation géométrique des mutiplicateurs de Lagrange.

Exercice 2 -
Soit $M \subset \mathbb{R}^3$ une surface définie par une équation $g(x, y, z) = 0$ et A un point n'appartenant pas à M. Á quelle condition $M_0 \in M$ est-il à distance minimale de A ?

Exercice 3 -
Soit la fonction,

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x \log(x) + y \log(y) + z \log(z) \end{array}$$

Déterminer les extrema de f sur la sous-variété $V_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^* | x + y + z - 3a = 0\}$.

Exercice 4 -
Soit $K = \{x \in \mathbb{R}^n | < x, x >= 1\}$.

i. Montrer que la fonction f suivante définie sur K atteint son minimun sur K,

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$$

ii. Retrouver que,

$$\sup_K f(x) = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}$$

iii. En déduire que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$,

$$|x_a \dots x_n| \leqslant \left(\frac{< x, x >}{n}\right)^{n/2}$$

Exercice 5 -
Discuter en fonction de $a, b > 0$ des extrema de f restreinte à la sous-variété M,

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x^3 + y^3 + z^3 \end{array}$$

où $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = a \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 = b^2\}$.

Exercice 6 -
Soit E espace euclidien réel, et u un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire associé. Montrer en utilisant les extrema liés que u admet une base de vecteurs propres dans E.
Indication : considérer l'application $x \mapsto < u(x), x >$.

Exercice 7 -
Soit la fonction,

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x \log(x) + y \log(y) + z \log(z) \end{array}$$

Déterminer les extrema de f sur la sous-variété $V_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^* | x + y + z - 3a = 0\}$.