Théorèmes d'inversion locale, des fonctions implicites

Inversion locale

Exercice 1 -
On considère la fonction suivante,

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y^2, y+z^2, z+x^2) \end{array}$$

i. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et déterminer l'ensemble des points où l'on peut appliquer le théorème d'inversion locale,

ii. Soit $f_{|U}: U \to V$ définie sur des ouverts de $\mathbb{R}^3$ fournis par le théorème d'inversion locale. Notant $g: V \to U$ son inverse, de coordonnées (g_x, g_y, g_z) et de variables (u, v, w), calculer les dérivées partielles de g_x ainsi qu'une dérivée partielle seconde.

Exercice 2 -
On considère les espaces $E = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_\infty$, $E_1 = \{f \in \mathcal{C}^1,\ f(0) = 0\}$ muni de la norme $||f||_1 = ||f'||_\infty$.

i. Montrer que E_1 est complet.
Indication : on montrera que $F = \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_{1,\infty} = ||.||_\infty + ||.||_1$ est complet, puis que les normes sont équivalentes.

ii. Montrer que la fonction ϕ suivante est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $d\phi(f) \in Isom(E_1, E)$ au voisinage e 0,

$$\psi: \begin{array}{ccc} E_1 & \to & E \\ f & \mapsto & f' + f^2 \end{array}$$

iii. En déduire que ϕ est un difféormorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.
Calculer les différentielles première et seconde de son inverse en 0.

Exercice 3 -
Soit $(E, < . >)$ un espace euclidien.
On considère $f: E \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant,

$$< df(x)h, h > \geqslant ||h||^2$$

i. Montrer que pour tout $a, b \in E$, f vérifie,

$$< f(b) - f(a), b - a > \geqslant ||b - a||^2$$

Indication : on pourra introduire la fonction réelle $\phi : t \mapsto < f(a + t(b - a)), b - a >$.

ii. Montrer que f est une application fermée injective,

iii. Montrer que $\forall x \in E$, l'application $df(x) \in Isom(E, E)$,

iv. En déduire que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global de E dans E.

Fonctions implicites

Exercice 1 -
On considère le système,

$$\begin{cases} x^4 + y^3 + z^4 + t^2 & = & 0 \\ x^3 + y^2 + z^2 + t & = & 2 \\ x + y + z + t & = & 0 \end{cases}$$

i. Vérifier que $m = (0, -1, 1, 0)$ est solution du système et que l'on peut résoudre localement le système en t au voisinage de m.

ii. Calculer la différentielle en $t = 0$ de la fonction $h(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ainsi obtenue.

Exercice 2 -
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On considère l'équation suivante de $\mathbb{R}^3$,

$$f(xy, z - 2x) = 0$$

i. Soit W_0 vérifiant l'équation. Trouver une condition suffisante pour que l'équation définisse z en fonction de (x, y) au voisinage de W_0.

ii. Supposant cette condition vérifiée, montrer qu'il existe $\lambda : U \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $(x, y, \lambda(x, y))$ solution de l'équation sur un voisinage vérifie la relation,

$$(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y})\lambda(x, y) = 2x$$

Exercice 3 -
Soit $f : D \to \mathbb{R}^3$ définie sur $D = \{xy > 0, zx > 0\}$ par,

$$(x, y, z, u) \quad \to \quad (x^2 + y^2 + z^2 + u^2, \log(xy) + \tfrac{y}{x}, \log(\tfrac{z}{x}) + zx)$$

i. Soit $m \in D$. Donner une condition pour que $f(x, y, z, u) = f(m)$ définisse implicitement (y, z, u) en fonction de x au voisinage de m,

ii. Soit $(1, 1, 1, 1) \in D$. Calculer la différentielle $d_x(y, z, u)(1, 1, 1)$.