Dérivées d'ordre supérieur, extrema libres

■ Dérivées d'ordre supérieur

Exercice 1 -
Montrer qu'une application bilinéaire continue entre espaces vectoriels normés est C^∞ et calculer ses différentielles.
Même question pour une application trilinéaire continue.

Exercice 2 -
Considérer la fonction suivante,

$$\begin{array}{cccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si}(x,y)=(0,0) \\ & & & 0 \text{ sinon} \end{array}$$

i. Montrer qu'elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
ii. Calculer ses différentielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Qu'en conclure ?

Exercice 3 -
Soit $(E, <.>)$ un espace euclidien, $U \subset E$ un ouvert connexe.
On considère $f : U \to E$ fonction C^2 telle que pour tout $x \in U$, $df(x)$ est une isométrie.

i. Montrer que la différentielle préserve le produit scalaire sur U, *i.e.*

$$\forall u, v \in U \;\; < df(x)u, df(x)v > = < u, v >$$

ii. En déduire le lemme des tresses, *i.e.* que pour tout $x, u, v, w \in U$,

$$< df(x)u, d^2f(x)(v,w) > = 0$$

Indication : utiliser le lemme de Schwarz.

iii. Montrer que la différentielle est bijective sur U, et en déduire que $d^2f(x) = 0$.
iv. En déduire qu'il existe $l \in \mathcal{L}(E)$ isométrie et $k \in E$ tels que,

$$f(x) = l(x) + k$$

v. Que se passe-t-il si U n'est plus supposé connexe ? Qu'obtient-on en appliquant directement Taylor avec reste intégrale ?

Formules de Taylor

Exercice 1 -
Soient f et g fonctions définies par,

$$\begin{array}{rccc} f: & (x,y) & \mapsto & log(x+e^y) \\ g: & (x,y) & \mapsto & sin(x)sin(y) \end{array}$$

i. Appliquer Taylor Young à f à l'ordre 2 en $(1,0)$.
ii. Appliquer Taylor Young à g à l'ordre 3 en $(\pi/4, \pi/4)$.

Exercice 2 -
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^k vérifiant $f(0) = 0$, $df(0) = 0$ et $d^2f(0) = 0$.
Montrer qu'il existe une matrice symétrique à coefficients réels ainsi que $F : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe C^{k-2} tels que,

$$\begin{array}{l} F(0) = A/2 \\ f(x) = < F(x).x, x > \end{array}$$

Exercice 3 -
Soit E espace vectoriel normé et $f : E \to \mathbb{R}$ de classe C^2 strictement positive telle que,

$$\exists M > 0 \ ||d^2f(x)|| \leqslant M$$

Montrer que $||df(x)|| \leqslant (2Mf(x))^{1/2}$.

Exercice 4 -
Soit E espace vectoriel normé, $I \subset \mathbb{R}$ intervalle et $\phi : I \to E$ telle que

$$\forall x \in I \ \exists A, B \geqslant 0 \ ||\phi(x)|| \leqslant A \text{ et} ||\phi''(x)|| \leqslant B$$

Pour $x_0 \in I$, considérons un intervalle $[x_0 - h, x_0 + h] \subset I$.
Montrer que,

$$\forall x \in I \ ||\phi'(x)|| \leqslant \frac{A}{h} + B\frac{(x-x_0)^2 + h^2}{2h}$$

Exercice 5 -
Considérons l'application déterminant définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f : M \mapsto Det(M)$.

i. Montrer que f est de classe C^∞ et calculer sa différentielle seconde.
ii. Écrire le développement de Taylor Young à l'ordre 2 de f en une matrice inversible puis en l'identité.

■ Extrema libres

Exercice 1 -

i. Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + x^4 + y^4$.
Montrer que l'origine est un minimum absolu de f et que $d^2f(0)$ n'est pas définie positive.

ii. Soit $g : (x, y) \mapsto x^2 + x^4 - y^4$.
Montrer que l'origine est un point critique de f et que $d^2f(0)$ est positive mais non définie.

Exercice 2 -
Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes,

i. $f(x, y) = x^4 + y^4 - \frac{1}{4}(x - y)^2$

ii. $g(x, y) = -2(x - y)^2 + x^4 + y^4$

Exercice 3 -
Considérons la fonction suivante,

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{x^2 y}{1+x^4+y^4} \end{array}$$

i. Montrer que f est une fonction bornée sur $\mathbb{R}^2$ et que $\underset{x\to\infty}{lim} f(x) = 0$,

ii. Montrer que les sup et inf de f sont atteints,

iii. Déterminer $max(f)$ et $min(f)$.

Exercice 4 -
Sur $\mathbb{R}^2$, on considère des fonctions générales définies par $f(x, y) = exp(\theta(x, y))$.

i. Déterminer les extrema de f pour les fonctions θ suivantes

$$\theta(x, y) = -(x^2 + y^2 + xy)$$

$$\theta(x, y) = -2x^2 + xy + y^2$$

ii. Généraliser pour $\theta(x) =< Ax, x >$ avec A matrice symétrique et $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 5 -
Soit H un espace hilbertien, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de H.
Considérons $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs sommable.

i. Montrer que la fonction suivante est de classe C^∞ sur H,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n ||x - x_n||^2$$

ii. Calculer sa différentielle et trouver $x_0 \in H$ tel que $df(x_0) = 0$.

iii. Calculer $d^2f(x_0)$ et en déduire que x_0 est un minimum de f.

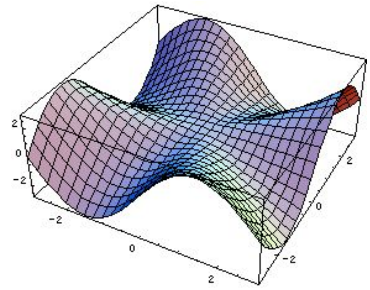

FIG. 1 – $xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$

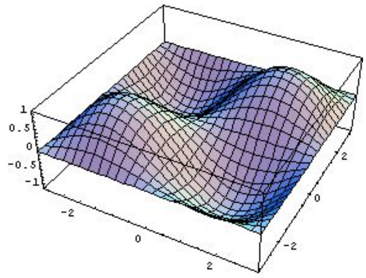

FIG. 2 – $sin(x)sin(y)$

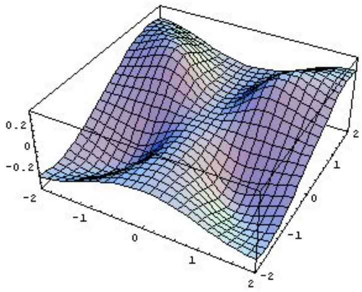

FIG. 3 – $x^2y/(1 + x^4 + y^4)$

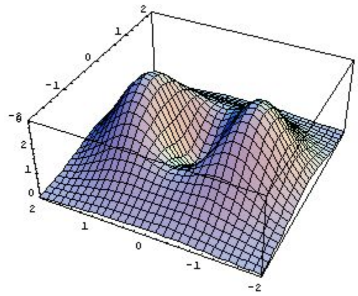

FIG. 4 – $(x^2 + 3y^2)e^{1-(x^2+y^2)}$

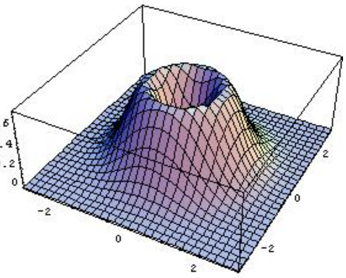

FIG. 5 – $2(x^2 + y^2)e^{(-x^2-y^2)}$

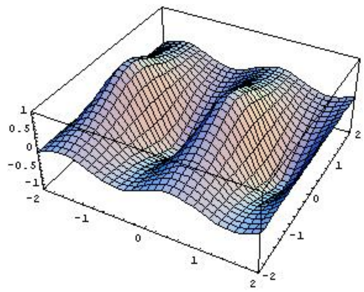

FIG. 6 – $sin(\pi x)/(1 + y^2)$

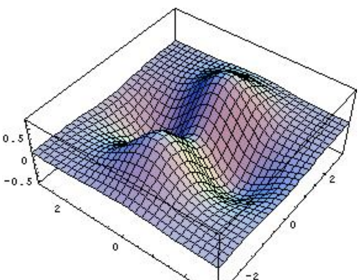

FIG. 7 – $(x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)/2}$

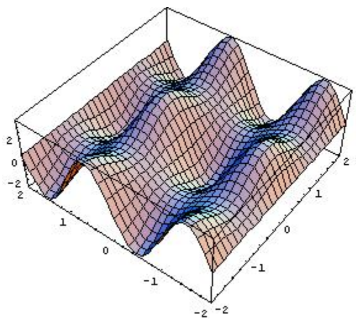

FIG. 8 – $(2 + cos(\pi x))sin(\pi y)$