Différentiabilité et accroissements finis

Dérivées partielles

Exercice 1 -
Soient E_1, E_2 espaces vectoriels normés, $U \subset E_1 \times E_2$ ouvert et $f : U \to F$.

i. Montrer que si f est différentiable en un point de U, alors les applications partielles f_1 et f_2 (où $f_1 : x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$) sont différentiables en ce point.

ii. En déduire que,
$$Df(X)(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_1)(u) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_2)(v)$$

Exercice 2 -
Considérant l'application suivante,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{xy^2}{x^2+y^2} \\ & (0,0) & \mapsto & 0 \end{array}$$

Montrer que f est différentiable selon toute direction en tout point de $\mathbb{R}^2$. Est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 3 -
Considérant l'application suivante,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{xy^2}{x^2+y^4} \\ & (0,0) & \mapsto & 0 \end{array}$$

Montrer que f est différentiable selon toute direction en tout point de $\mathbb{R}^2$. Est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 4 -
Considérant $\gamma > 0$ ainsi que la fonction suivante,

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (f_1(x,y), f_2(x,y)) \end{array}$$

où $f_1(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^\gamma}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, 0 sinon, et $f_2(x,y) = xy$.

i. Discuter de la différentiabilité de ϕ selon le paramètre γ,

ii. Calculer la jacobienne de ϕ,

iii. La fonction ϕ est-elle C^1 ?

Exercice 5 -
Soit a réel strictement positif et $\phi_k :]-a, a[\to \mathbb{R}$ fonctions de classe C^1.
On considère $D = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x_{k+1} - x_k| < a,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$ ainsi que $f : D \to \mathbb{R}^n$ définie par $f : x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ où $f_k(x) = \phi_k(x_k - x_{k+1})$.

i. Montrer que D est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et que f est de classe C^1 sur D.

ii. Calculer la matrice jacobienne de f en tout point de D ainsi que la norme de $Df(x)$ lorsque l'on munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $||\cdot||_\infty$.

Exercice 6 - *Différentielle de la norme*
On considère $\mathbb{R}^2$ ainsi que les applications normes usuelles à valeur dans $\mathbb{R}^+$.
Pour chacune d'elles, trouver le lieu des points de $\mathbb{R}^2$ où elles ne sont pas différentiables.

Exercice 7 - *Structure hilbertienne*
Soit H un espace de Hilbert réel.

i. Montrer que la fonction suivante est différentiable C^∞.

$$f : \begin{array}{ccc} H & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & ||x||^2 \end{array}$$

Au passage, calculer les normes des applications linéaires continues rencontrées.

ii. En déduire que les applications $||\cdot||$ et $||\cdot||^{-1}$ sont C^∞ sur $H - \{0\}$.
Quel est le gradient de $||\cdot||$?

iii. L'application norme est-elle différentiable en 0 ?

■ Retour sur les Banach

Exercice 1 -
Soient E, F deux espaces vectoriels normés. On considère $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues, muni de la norme usuelle.
Montrer que si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un espace de Banach.

Exercice 2 -
Soit l' espace vectoriel $E = \mathbb{C}[X]$ et l'application,

$$||\cdot|| : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ \sum a_i X^i & \mapsto & Sup|a_i| \end{array}$$

i. Montrer que c'est une norme. L'espace E est-il complet pour cette norme ?

ii. Discuter de la continuité des applications suivantes

$$\phi_1 : P \mapsto P' \quad \phi_2 : P \mapsto (X+1)P \quad \phi_3 : P \mapsto P(z_0)$$

Calculer la norme de celles qui sont continues.

Théorème des accroissements finis

Exercice 1 -
Montrer que le système d'équations suivant admet au plus une solution,

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} sin(x+y) \\ y = \frac{1}{2} cos(x-y) \end{cases}$$

Exercice 2 -
Soit $U \subset E$ ouvert d'un espace vectoriel normé.
Montrer que U est connexe si et seulement si U est connexe par arc.

Exercice 3 -
Soit $f : U \subset E \to F$ une application différentiable sur un ouvert connexe entre espaces vectoriels normés.
Montrer que $Df = 0$ sur U implique que f est constante sur U.