Différentiabilité

Notion de différentielle

Exercice 1 -
Soient E, F espaces vectoriels normés, $U \subset E$ ouvert et $f : U \to F$ application différentiable.

i. Vérifier que la différentiabilité de f en un point est indépendante des normes équivalentes choisies.
ii. Calculer la différentielle d'une application bilinéraire continue.

Exercice 2 -
Soit E espace vectoriel normé. On considère,

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{L}(E,F) \\ & (u,v) & \mapsto & u \circ v \end{array}$$

i. Montrer que ψ est continue différentiable et calculer sa différentielle.
ii. En déduire que la différentielle de l'application $\psi_p : u \mapsto u^{(p)}$.

Exercice 3 - *Espace matriciel*
Soit $E = \mathcal{M}(\mathbb{R})$.
Calculer les différentielles des applications suivantes,

$$M \mapsto M^k \quad M \mapsto {}^tM \quad M \mapsto M^tM$$

Zoologie

Exercice 1 - *Déterminant*
Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

i. Montrer la régularité de l'application suivante,

$$\begin{array}{rccc} det: & E & \to & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & det(A) \end{array}$$

Calculer sa différentielle en l'identité.

ii. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $D(det)(A) : B \mapsto det(A)Tr(A^{-1}B)$.
iii. Par un raisonnement de densité, en déduire que pour $A \in E$, $D(det)(A)(H) = Tr({}^tcomAH)$.
A quelle condition $D(det)(A) = 0$.

Exercice 2 - *Inverse*
Soit E espace de Banach.
On considère l'application inverse,

$$\begin{array}{rccc} \phi: & L(E)^\times & \to & L(E)^\times \\ & u & \mapsto & u^{-1} \end{array}$$

Montrer que ϕ est différentiable et calculer sa différentielle,

Exercice 3 - *Incursion en dimension infinie*
On considère $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}^2)$ muni de la norme $||f|| = sup_{\in I}(|f(t)| + |f'(t)|)$.
Montrer que l'application suivante est C^1 et calculer sa différentielle,

$$\begin{array}{cccc} F: & E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \displaystyle\int_I det(f(t), f'(t))dt \end{array}$$

■ Notion de $\mathbb{C}$-différentiabilité

Exercice 1 - *Conditions de Cauchy-Riemann*
Soit une application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.
On discute ici de la différentiabilité de f selon que $\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ou un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

i. Rappeler les définitions de différentiabilité selon que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ou $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.
La $\mathbb{C}$-différentiabilité implique-t-elle la $\mathbb{R}$-différentiabilité ?

ii. Trouver à quelle condition une application $\mathbb{R}$-linéaire est $\mathbb{C}$-linéaire.
En déduire des conditions, dites de *Cauchy-Riemann*, pour qu'une application $\mathbb{R}$-différentiable soit $\mathbb{C}$-différentiable.

iii. On considère maintenant $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$.
Utilisant un changement de base, vérifier que les conditions de *Cauchy-Riemann* se traduisent par,

$$\begin{array}{rcl} \partial = & \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) = & f' \\ \overline{\partial} = & \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) = & 0 \end{array}$$

iv. *Application :* Etudier les différentiabilités des applications suivantes,

$$f_1 : z \mapsto \overline{z} \quad f_2 : z \mapsto |z|$$