Devoir encadré
Théorème de Mason

—

Polynômes, théorème de Fermat et conjecture abc

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

La *conjecture abc* est une conjecture de théorie des nombres énoncée par *J.Oesterlé* et *D.W.Masser* au début des années 80.

Conjecture (abc) *Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors il existe une constante C_ε telle que pour tout entiers $a,\ b,$ et c premiers deux à deux vérifiant $a + b = c$,*

$$\max(|a|, |b|, |c|) \leqslant C_\varepsilon \operatorname{rad}(abc)^{1+\varepsilon}$$

où $\operatorname{rad}(m)$ *est le produit des premiers divisant m.*

Cette conjecture implique de nombreux résultats centraux de la théorie des nombres, et notamment une *version asymptotique du théorème de Fermat*.

Il s'agit dans ce devoir de prouver l'analogue de la conjecture abc dans l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[X]$, le *théorème de Mason*, ainsi que d'en déduire une version polynomiale du théorème de Fermat.

Théorème (Mason-1984) *Soient $a,\ b$ et $c \in \mathbb{C}[X]$ premiers deux à deux et vérifiant $a + b = c$. Alors*

$$\max\{\deg(a), \deg(b), \deg(c)\} \leqslant \operatorname{rad}(abc) - 1 \tag{1}$$

où $\operatorname{rad}(P)$ *est le nombre de racines distinctes* et comptées sans multiplicité *du polynôme P.*

1 - Préliminaires

i) Expliquer succintement en quoi le *théorème de Mason* est l'analogue polynomial de la *conjecture abc* ;
   Soit $D : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ l'application dérivation qui à un polynôme P associe P' son polynôme dérivé. On définit l'application *dérivation logarithmique* $L : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}(X)$ par la formule
   $$L(P) = D(P)/P.$$
ii) Calculer $L(P)$ pour $P = X^2 + 3X + 1$ et $P = (X-1)(X+2)^2$;
   Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on introduit le polynôme radical
   $$\operatorname{Rad}(P) = \prod_{a_i \text{ racine de} P} (X - a_i).$$

iii) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de racines a_i de multiplicité α_i. Exprimer P en fonction de $a_i,\ \alpha_i$ et $rad(P)$.

iv) Montrer que

$$L(P) = \sum_{i=1}^{\mathrm{rad}(P)} \frac{\alpha_i}{X - a_i}.$$

On définit une dérivée logarithmique sur les *fractions rationnelles* $\mathbb{C}(X)$ par la formule suivante

$$L(P/Q) = L(P) - L(Q)$$

v) Montrer que pour $P_1/Q_1 = P_2/Q_2$ deux expressions équivalentes d'une même fraction, la formule de L donne la même expression. En déduire que cette application est bien définie sur $\mathbb{C}(X)$.

2 - Théorème de Mason

On démontre dans cette partie le théorème de Mason proprement dit. On considère $a,\ b$ et c trois polynômes de $\mathbb{C}[X]$ premiers deux à deux et vérifiant $a + b = c$. Cette relation dans $\mathbb{C}[X]$ est ramenée à la relation équivalente

$$f + g = 1 \tag{2}$$

où $f = a/c$ et $g = b/c$ sont dans $\mathbb{C}(X)$.

i) Montrer que la relation (2) implique la relation

$$L(f)f + L(g)g = 0$$

où L est la dérivée logarithmique définie dans les préliminaires.

ii) En déduire la relation

$$\frac{b}{a} = -\frac{\sum \frac{n_i}{X-a_i} - \sum \frac{m_i}{X-c_i}}{\sum \frac{k_i}{X-b_i} - \sum \frac{m_i}{X-c_i}}$$

où a_i, b_i et c_i sont les racines respectives de a, b et c, et $n_i,\ k_i$ et m_i sont les multiplicités de ces racines ;

iii) Exprimer le radical $\mathrm{Rad}(abc)$ en fonction des a_i, b_j et c_k. En déduire que $\mathrm{Rad}(abc)L(f)$ et $\mathrm{Rad}(abc)L(g)$ sont des polynômes de degré au plus $\mathrm{rad}(abc) - 1$;

iv) Montrer que a divise $\mathrm{Rad}(abc)L(f)$ et b divise $\mathrm{Rad}(abc)L(g)$. En déduire un majorant commun à $\deg(a)$ et $\deg(b)$;

v) Expliquer en quoi $a,\ b$ et c jouent un rôle symétrique par rapport à leur degré. En déduire une majoration de $\deg(c)$. Conclure.

3 - Théorème de Fermat

En application du *théorème de Mason*, il s'agit ici de démontrer le *théorème de Fermat pour les polynômes.*

Théorème (Fermat) *Pour $n \geqslant 3$, l'équation*

$$x^n + y^n = z^n.$$

n'admet pas de solution avec $x,\ y$ et $z \in \mathbb{C}[X]$.

i) Montrer que l'on peut supposer $x,\ y$ et z premiers deux à deux dans l'équation précédente ;

ii) Donner une majoration de $n\deg(x)$, $n\deg(y)$ et $n\deg(z)$;

iii) Conclure.