Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 6
Codes correcteurs

Exercice 1. Déterminer les paramètres (n, M, d) du code binaire

$$C = \{00001100, 00001111, 01010101, 11011101\}.$$

Exercice 2. Soit C le code binaire défini par

$$C = \{0000, 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011, 1111\}.$$

Montrer que C est un code linéaire de longueur 4 et de dimension 3 sur $\mathbb{F}_2$. Quelle est sa distance minimum ? Quelle est sa capacité de correction ?

Exercice 3. On considère les codes binaires suivants :

$$C_1 = \{0000, 1100, 1010, 0110, 0101, 0011, 1111\} \subseteq (\mathbb{F}_2)^4;$$
$$C_2 = \{00000, 01010, 00001, 01011, 01001\} \subseteq (\mathbb{F}_2)^5;$$
$$C_3 = \{000000, 101000, 001110, 100111\} \subseteq (\mathbb{F}_2)^6.$$

Dire dans chaque cas si le code est linéaire. Calculer (n, M, d) et la capacité de correction t pour chaque un des C_i.

Exercice 4. Dans la suite, on supposera les codes recherchés linéaires.

i) Construire un code binaire de 4 mots de longueur 3 et de distance minimum 2.
ii) Montrer qu'un code binaire de longueur 3 et de distance minimum 2 possède au plus 4 mots.
iii) Quelle est la distance maximale que peut avoir un code linéaire binaire de 64 éléments de longueur 10 ?

Exercice 5. Vérifier que le code linéaire binaire $C = \{000, 110, 011, 101\}$ est MDS.

Exercice 6.

i) Soit C un code linéaire binaire de longueur n et dimension k. Si t est le nombre d'erreurs qu'il peut corriger, montrer que
$$2^{n-k} \geq 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{t}.$$
En déduire que si C est de longueur 17 et de dimension 10, il ne corrige pas plus d'une erreur.
ii) Quelle est la plus grande dimension d'un code linéaire binaire de longueur 8 qui corrige 2 erreurs ? Construire un tel code.

Exercice 7. Soit C le code linéaire sur $\mathbb{F}_3$ de matrice génératrice

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Montrer que C est systématique, et en donner une matrice génératrice normalisée G'.
ii) Coder le message (12) avec G, puis avec G'.
iii) Construire une matrice de contrôle de C et calculer sa distance minimale. Le code est-il MDS ?
iv) On reçoit le message (11102) codé par G. Quel est le message d'origine ?
v) Le mot (12121) est-il un mot du code ? (Le décoder sachant qu'il a été encodé par G.)

Exercice 8. On considère la matrice G à coefficients dans $\mathbb{F}_2$ définie par

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Quel est le rang de G ?
ii) En déduire que G est la génératrice d'un code binaire C de longueur 6 et de dimension 4.
iii) Le code C est-il systématique ?
iv) Quelle est la distance minimale de C ?

Exercice 9. On considère le code linéaire C sur $\mathbb{F}_5$, donné par sa matrice de contrôle

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On admet que la capacité de correction de C est 1.
i) Donner une génératrice de C.
ii) Sous l'hypothèse d'au plus une erreur, décoder les messages (223104) et (110144).

Exercice 10. (Code de Hamming binaire de longueur 7) Soit C le code linéaire binaire de matrice de contrôle

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Déterminer $d(C)$.
ii) Donner une matrice génératrice de C.
iii) Le code C est-il MDS ? Parfait ?
iv) Décoder quand c'est possible les mots $(1111111), (1101011), (0110110)$ et (1111010).

Exercice 11. Soit C le code linéaire sur $\mathbb{F}_5$ de matrice génératrice

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Donner le nombre de mots de C.
ii) Le code C est-il systématique ?
iii) Montrer que la matrice

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice de contrôle de C.
iv) Calculer la capacité de correction t de C. Le code C est-il MDS ?
v) Décoder quand c'est possible les mots (3001), (1101) et (2311).

Exercice 12. Soit $C \subseteq \mathbb{F}_q^n$ un code linéaire de dimension k. Soient $l \leq k$ et $i_1, \dots, i_l \in \{1, \dots, n\}$. Soit $C' = \{c \in C : \ c_{i_1} = \cdots = c_{i_l} = 0\}$. On considère $C' \subseteq \mathbb{F}_q^{n-l}$ comme code linéaire. Montrer qu'il est possible de choisir $i_1, \dots, i_l$ tels que $\dim C' = k - l$ et $d(C) = d(C')$.