Feuille d'exercices n° 1
Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Nombres premiers. Divisibilité.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ entier supérieur à 2 de décomposition en premiers $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_N^{\alpha_N}$. Exprimer le nombre de diviseurs positifs de n en fonction de $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3.

Exercice 3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2(n^2-1)(n^4-16)$ est divisible par 360.

Exercice 4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 11 divise $2^{6n+3} + 3^{2n+1}$.

Exercice 5. (Nombres de Mersenne et de Fermat). Soient $a \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$ deux entiers.

i) Montrer que si $a^n - 1$ est premier alors $a = 2$ et n est premier.
ii) Montrer que si $2^n + 1$ est premier alors n est une puissance de 2. On note F_n un tel entier.
iii) Montrer que F_n et F_m sont premiers entre eux et en déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice 6. (petit théorème de Fermat). Soit p un nombre premier et $1 \leqslant k \leqslant p-1$ un entier.

i) Montrer que p divise le coefficient binomial $\binom{p}{k}$
ii) En déduire que pour tout a entier, p divise $a^p - a$
iii) *Application :* déterminer tous les nombres premiers p divisant $2^p + 1$

Exercice 7.

i) Soient m et n deux entiers. Exprimer le pgcd et le ppcm de m et n en fonction des décompositions en facteurs premiers de m et n.
ii) Montrer qu'il existe un diviseur m' de m et n' de n tels que $pgcd(m', n') = 1$ et $ppcm(m.n) = m'n'$.
iii) Déterminer les couples d'entiers dont le pgcd est 18 et le ppcm est 540.

Exercice 8. Trouver les p premiers tels que l'équation $x^2 - y^2 = p$ admette des solutions dans $\mathbb{N}$.

Divisons euclidiennes

Exercice 9.

i) Calculer le pgcd de 792 et 455 de deux manières différentes. Quel est leur ppcm ?
ii) Faire de même en utilisant une division euclidienne par excès dans l'algorithme d'Euclide (ie avec des restes négatifs).

Exercice 10. Soient a et $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

i) Montrer que $pgcd(a,b) = pgcd(a, b-a)$. En déduire une nouvelle version de l'algorithme d'Euclide.
ii) Montrer que $pgcd(a^n, b^n) = pgcd(a,b)^n$.
iii) Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $pgcd(a,b) = 1$ et $pgcd(a,c) = 1$. Montrer que $pgcd(a, bc) = 1$.
iv) Soit $c \in \mathbb{Z}$, montrer que $pgcd(ac, bc) = c \times pgcd(a,b)$.

Exercice 11. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

i) Soit r le reste de la division euclidienne de a par b. Donner la division euclidienne de $2^a - 1$ par $2^b - 1$ en fonction de r.

ii) En déduire le pgcd de $2^a - 1$ et $2^b - 1$.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

i) Montrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 est $0, 1$ ou 4.

ii) En déduire que l'équation suivante n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$

$$x^2 - 16y - 11 = 0.$$

EQUATION $ax + by = c$

Exercice 13. Soient $a, b, m \in \mathbb{Z}$ et notons $d = pgcd(a, b)$. Considérons l'équation de Bezout

$$au + bv = m.$$

i) Montrer que l'équation admet une solution si et seulement si $d|m$.

ii) Supposons une solution particulière $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ donnée, vérifier que les autres solutions de l'équation sont données par les couples $(u_k, v_k) \in \mathbb{Z}^2)$ définis par

$$\begin{cases} u_k = u_0 + kb' \\ v_k = v_0 - ka' \end{cases}$$

où $a = da'$ et $b = db'$.

Exercice 14. Trouver une solution entière aux équations suivantes

$$5x + 7y = 1 \qquad 56x + 35y = 10$$

Exercice 15. On considère les équations diophantiennes suivantes :

$$792x + 455y = 1 \qquad 80x + 50y = 4910 \qquad 560x + 1176y = 56$$

i) Trouver l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ solutions.

ii) Trouver l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ solutions.