Interrogation n° 2
Arithmétique de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et de $k[X]$.

Durée 1 heure

Epreuve SANS document et SANS calculatrice. Les exos sont indépendants et ne sont pas classés par ordre de difficultée.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Question de cours

Rappeler la définition de la fonction d'Euler ϕ et donner un formule pour calculer $\phi(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1.

i) Expliquer pourquoi 11 est inversible dans $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ et calculer son inverse.

ii) En déduire que l'équation $11x = 3$ admet une solution dans $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

iii) Résoudre le système de congruences suivant

$$\begin{cases} 11x & \equiv 3 \mod 24 \\ x & \equiv 2 \mod 29. \end{cases}$$

Exercice 2.

i) Donner la liste complète des éléments du groupe $(\mathbb{Z}/14\mathbb{Z})^*$.

ii) Quel est l'ordre du groupe $(\mathbb{Z}/14\mathbb{Z})^*$ et quels sont les ordres possibles des éléments dans ce groupe.

iii) Calculer l'ordre de 3 et 9 dans $(\mathbb{Z}/14\mathbb{Z})^*$. Donner un générateur de ce groupe.

Exercice 3. On considère les deux polynômes suivants sur $\mathbb{Q}[X]$:

$$P(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 - X + 3 \quad et \quad Q(X) = X^3 + 1.$$

i) Donner un pgcd de P et Q.

ii) Donner une décomposition en facteurs irréductibles de $P(X)$, dans $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 4. Combien existe-il de polynômes irréductibles de degré 2 sur $\mathbb{F}_2[X]$. Est-ce que le polynôme $P(X) = X^4 + X^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_2[X]$?