Interrogation n° 1
Arithmétique de $\mathbb{Z}$ et groupes.

Durée 1 heure

Epreuve SANS document et SANS calculatrice. Les exercices sont indépendants et ne sont pas classés par ordre de difficultée.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Question de cours :

1. Rappeler le théorème de Bezout.
2. Rappeler le théorème fondamental de l'arithmétique, ainsi qu'une formule pour le ppcm et le pgcd de deux entiers.

Exercice 1.

1. Soient m et n deux entiers non-nuls. Montrer qu'il existe un diviseur m' de m et n' de n tels que $pgcd(m', n') = 1$ et $ppcm(, .n) = m'n'$.
2. Déterminer les couples d'entiers dont le pgcd est 18 et le ppcm est 540.

Exercice 2. On définit les suites d'entiers $(a_n)_{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{\mathbb{N}}$ par la relation

$$a_n + \sqrt{2}b_n = (1 + \sqrt{2})^n.$$

1. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n ;
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $pgcd(a_n, b_n) = 1$.

Exercice 3. Soit $p \in \mathbb{N}$ premier. On considére l'équation diophantienne suivante

$$x^2 - y^2 = p.$$

Donner les solutions dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Exercice 4. Soit $\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n} | 0 \leqslant k \leqslant n\}$ l'ensemble des racines $n$ièmes de l'unitée.

1. Vérifier que $\mathbb{U}_n$ est un groupe pour la multiplication.
2. Calculer l'ordre de $z_1 = e^{2i\pi/n}$. En déduire que $\mathbb{U}_n$ est cyclique.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Rappeler l'ordre de z_1^k. En déduire la forme des générateurs de $\mathbb{U}_n$. En donner la liste pour $\mathbb{U}_6$.