Université P. & M. Curie 2009-2010
Calcul vectoriel et matriciel (LM121)

Feuille d'exercices n^{o} 7 / 7
Transformations linéaires de l'espace

1. Applications linéaires de $\mathbb{R}^3$

1. Pour tout réel a, on considère les matrices

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & (1-a)^2 \\ 0 & a & 2a(1-a) \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}, \qquad D(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer P^2 et donner l'inverse de P.

(2) Vérifier que $M(a)$ et $D(a)$ sont conjuguées $\forall a \in \mathbb{R}$. (On pourra calculer $PD(a)P^{-1}$.)

(3) Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad M(a)M(b) = M(ab)$.

(4) En déduire que $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad [M(a)]^n = M(a^n)$.

(5) Comment choisir $c \in \mathbb{R}$ pour que $M(c) = I$? Montrer que si $a \neq 0$, il existe un réel b tel que $M(a)M(b) = I$. En déduire l'inverse de $M(a)$. La matrice $M(0)$ est-elle inversible ?

2. On travaille dans $\mathbb{R}^3$.
Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Soit $(x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}^3 - \{0\})^3$.
On suppose que :

$$\begin{cases} \phi(x_1) = \lambda_1 x_1 \\ \phi(x_2) = \lambda_2 x_2 \\ \phi(x_3) = \lambda_3 x_3 \end{cases}$$

(1) Montrer que : $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$, avec $i \neq j$, $\{x_i, x_j\}$ est libre

(2) La famille $\{x_1, x_2, x_3\}$ est-elle libre ?

3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$
On considére $e \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(e) \neq 0$

(1) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $u := \alpha e + \beta f(e) + \gamma f^2(e) = 0$. Montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (Indication : calculer $f(u)$ et $f^2(u)$

(2) Montrer que la famille $e, f(e), f^2(e)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

2. Opérateurs orthogonaux

4. Appartenance à $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales :

$$R_{2,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \; S_{2,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \; R_{3,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{3,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C_{3,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

5. Appartenance à $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$. Parmi les matrices de l'exercice précédent, déterminer les rotations.

6. CNS. Soient $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*+$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le couple (a,b) pour que M soit orthogonale. Est-ce une rotation ? Préciser la nature de la transformation.

7. Axe de rotation. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Soit $X \in \mathbb{R}^3$. Montrer que $R_\theta X +^t R_\theta X + (1 - \mathrm{tr}(R_\theta))X$ est invariant par R_θ. Soit R une rotation de $\mathbb{R}^3$. Déduire de ce qui précede que :

$$Y = R_\theta X +^t R_\theta X + (1 - \mathrm{tr}(R_\theta))X$$

est invariant par R. Que dire de Y ? Cette méthode permet-elle de trouver l'axe de rotation d'un élément de $\mathcal{SO}_3$? Pourquoi ?

8. Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer la nature de A. Déterminer l'axe de rotation de A. Soit θ l'angle de la rotation. On rappelle que la trace d'une matrice est la somme des éléments diagonaux et que deux matrices conjuguées ont même trace. En déduire la valeur de $\cos\theta$.

9. Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Quelle est la nature de A ? Calculer ${}^tA$. Conclure.