

FEUILLE D'EXERCICES N° 6 / 7
Inversion des matrices. Classification des systèmes linéaires

1. INVERSION DE MATRICES

1. Donner une forme réduite des matrices suivantes :

$$a) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -6 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Calculer les matrices inverses de

$$a) \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -4 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -4 \end{pmatrix} \quad e) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} m-5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & m-3 \\ 1 & m-4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $\det A = 0$ si et seulement si $m = 0$ ou $m = 6$.

b) En supposant que m est différent de 0 et de 6, donner l'inverse de A en fonction de m .

4. Soit A une matrice carrée de taille 4 et soit b une matrice 4×1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Trouver x , une matrice 4×1 telle que $Ax = b$.

2. SYSTÈMES LINÉAIRES

5. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$a) \begin{cases} x + 5y = 11 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ x + y - 2z = 1 \\ x + 4y + z = 1 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = -1 \\ x + 3z = 3 \\ 2x + y + 4z = 4 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + 2y - 5z + 4t = 0 \\ 2x - 3y + 2z - 3t = 0 \\ 4x + 6y + z - 6t = 0 \end{cases} \quad e) \begin{cases} x + y + z + t = 10 \\ x - y + z + t = 6 \\ x + y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 7x + 5y + 6z + 5t = 23 \\ 8x + 6y + 10z + 9t = 33 \\ 10x + 7y + 8z + 7t = 32 \end{cases}$$

6. Résoudre les systèmes linéaires suivants en fonction des paramètres a et b réels :

$$a) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + 6y - 9z = 1 \\ 2x + 4y - 6z = a \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + ay + bz = 0 \\ ax + y + bz = 0 \\ bx + ay + z = 0 \end{cases} \quad d) \begin{cases} (\cos a)x - (\sin a)y = 0 \\ (\sin a)x - (\cos a)y = 0 \end{cases}$$

7. Résoudre, suivant les valeurs de m :

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x + (m+1)y = m+2 \\ mx + (m+4)y = 3 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_2 : \begin{cases} mx + (m-1)y = m+2 \\ (m+1)x - my = 5m+3 \end{cases}$$

8. Soit a un nombre réel. On considère le système linéaire $AX = C$ où

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \quad A = \begin{pmatrix} a & -3 & 5 \\ 1 & -a & 3 \\ 9 & -7 & 8a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $\det A$. Pour quelles valeurs de a a-t-on $\det A = 0$?

b) On choisit a tel que $\det A \neq 0$. Calculer en fonction de a la solution de ce système.