Université P. & M. Curie — 2009-2010

Calcul vectoriel et matriciel (LM121)

Feuille d'exercices 5/7
L'anneau des matrices carrées

1. — On donne $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -7 & -1 \\ 0 & -9 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer AB, BA, Au, Av, Bu, Bv.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Dire quels produits sont possibles et les calculer.

2. — Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Calculer $A(\theta)A(\theta')$, $A(\theta)^n$, $A(\theta)A(-\theta)$. Que peut-on dire sur l'ensemble $\mathcal{A} = \{A(\theta), \theta \in \mathbf{R}\}$?

3. — On donne $P_1 = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} -23 & 30 \\ -20 & 26 \end{pmatrix}$. Calculer P_1P_2, P_2P_1, P_1MP_2, M^n.

4. — On dit qu'une matrice carrée A est idempotente si $A^2 = A$. Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 15 & 21 \\ -10 & -14 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ le sont.

Montrer que, quelque soit A, et $B = 2A - I$, $B^2 = I$ est équivalent à $A^2 = A$.

5. — On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer AB et AC. Que remarque-t-on ? A est-elle inversible ?

6. — Trouver toutes les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, et avec $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

7. — Soit A une matrice carrée d'ordre n. On suppose que A^2 est combinaison linéaire de A et I_n.

– Montrer qu'il en est de même pour A^n, $n \in \mathbf{N}$.

– On suppose de plus que A^2 n'est pas colinéaire à A. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

– Appliquer au cas où $A = I_n - J_n$, où J_n est la matrice dont tous les coefficients sont 1.

– Appliquer à $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, puis montrer que pour $n = 2$, l'hypothèse de départ est en fait toujours vérifiée. Donner une formule pour A^{-1} quand cela est possible.

8. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

9. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$. Calculer B^n et A^n pour $n \in \mathbf{N}$.