Interrogation n° 3
Déterminants et matrices

Durée 1 heure

Epreuve SANS document et SANS calculatrice. Les exercices sont indépendants et ne sont pas classés par ordre de difficulté.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barême est indicatif.

Question de cours : *(2 points).*

1. Écrire la matrice associée au système

$$\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ -x+5y+z=0 \\ 2y+3z=0 \\ -x+z=0 \end{cases}$$

2. Soient a, b, c, a' vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction de $det(a,b,c)$ (et si besoin de $det(a'b,c)$) les expressions suivantes :

$$det(a,c,b) \qquad det(\lambda a, \lambda b, \lambda c) \qquad det(a+\lambda a', b, c)$$

Exercice 1. *(5 points).* On considère les matrices suivantes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Mettre A_1 et A_2 sous forme triangulaire supérieure ;
2. Calculer leurs déterminants ;
3. Donner leurs inverses lorsque c'est possible.

Exercice 2. *(2 points).* On considère la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Formons $B = A - 2Id$. Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$;
2. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. *(2 points).* Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère les trois vecteurs suivants

$$u_1 = \{2, -1, 0\}, \ u_1 = \{-6, x, -1\}, \ u_1 = \{4, 0, x\}$$

En utilisant les déterminants, déterminer les valeurs de $x \in \mathbb{N}$ pour lesquelles les vecteurs u_1, u_2 et u_3 sont liés. *On prendra soin de justifier son raisonnement.*

Exercice 4. *(4 points)*. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les droites suivantes de $\mathbb{R}^3$

$$(\mathcal{D}_1)\begin{cases} x+y-3=0 \\ z+1=0 \end{cases} \qquad (\mathcal{D}_2)\begin{cases} x-z-4=0 \\ y=0 \end{cases}$$

1. Donner des équations paramétriques de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. En déduire un vecteur directeur de chacune des droites ;
2. En utilisant le déterminant, donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$;
3. En utilisant le déterminant, déterminer si $\mathcal{P}$ est perpendiculaire au plan d'équation

$$2x-y+z+3=0.$$

Exercice 5. *(5 points)*. On considère les matrices

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ -7 & -8 & -6 \end{pmatrix} \qquad P=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer l'inverse de P ;
2. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.