Interrogation n° 2
Vecteurs libres, géométrie dans $\mathbb{R}^3$ et déterminants

Durée 1 heure

Epreuve SANS document et SANS calculatrice. Les exercices sont indépendants et ne sont pas classés par ordre de difficulté.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Question de cours :

1. Soient $u,\ v$ et w vecteurs non-nuls de $\mathbb{R}^3$. Donner une condition pour que ces trois vecteurs forment une famille libre ;
2. Soit $u = (a, b, c)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Donner l'équation cartésienne générale d'un plan perpendiculaire à u.

Exercice 1. Déterminer si les familles de vecteurs suivantes sont libres :

1. $u = (2, -1, 3)$, $v = (1, 1, -1)$, $w = (3, -2, 1)$;
2. $u = (1, -3, 1)$, $v = (1, 0, -3)$, $w = (3, -3, -5)$;

Exercice 2. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ les vecteurs suivants sont-ils libres ?

$$u = (m, 1, 0) \quad v = (1, 1, 0) \quad w = (m, 1, 1).$$

Exercice 3. Soient u, v et w trois vecteurs libres de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille $\{u - v - w, 2u + 3v, v - 2w\}$ est une famille libre.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases} \qquad \mathcal{D}_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \ t \in \mathbb{R}$$

1. Donner une équation paramétrique de $\mathcal{D}_1$.
2. Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ ainsi que de $\mathcal{D}_2$.
3. En déduire une équation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ parallèle à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et passant par $A = (1, 0, -1)$;
4. Donner une équation implicite de $\mathcal{P}$.

Exercice 5. En utilisant le déterminant, donner une équation du plan passant par le point $A = (0, 1, 0)$ et engendré par les vecteurs $u = (-3, 0, 1)$ et $v = (2, -1, 1)$.

Exercice 6. Calculer la valeur des déterminants suivants

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos(a)^2 & 1 & \cos(2a) \\ \cos(b)^2 & 1 & \cos(2b) \\ \cos(c)^2 & 1 & \cos(2c) \end{vmatrix}$$

où $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.