Devoir encadré n° 2
Déterminants et matrices

Exercice 1. On considère les matrices suivantes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ -3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Mettre A_1 et A_2 sous forme triangulaire supérieure ;
2. Calculer $det(A_1)$ et $det(A_2)$;
3. Inverser A_1 et A_2 lorsque c'est possible.

Exercice 2. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les droites suivantes de $\mathbb{R}^3$

$$(\mathcal{D}_1) \begin{cases} x - 3 = 0 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{D}_2) \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

1. Donner des équations paramétriques de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. En déduire un vecteur directeur de chacune des droites ;
2. En utilisant le déterminant, donner une équation cartésienne du plan contenant $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Exercice 3. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Formons $B = A - Id$. Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$;
2. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. On considère les trois vecteurs suivants

$$u_1 = \{1-n, 1, 1\}, \; u_2 = \{1, 1-n, 1\}, \; u_3 = \{1, 1, 1-n\}$$

En utilisant les déterminants, déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles les vecteurs u_1, u_2 et u_3 sont liés. *On prendra soin de justifier son raisonnement.*

Exercice 5. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} & = 5/2u_n + v_n \\ v_{n+1} & = -2u_n - 1/2v_n \end{cases} \quad \text{avec } u_0 = 1 \ v_0 = -1$$

1. Trouver la matrice A telle que
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$
2. Soit la matrice
$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Calculer l'inverse de P ;
3. Calculer $B = P^{-1}AP$ et en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$;
4. Posons $X_n = (u_n, v_n)$. En remarquant que $X_{n+1} = A^{n+1}X_0$, en déduire les valeurs des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.