

DEVOIR ENCADRÉ  
Vecteurs libres, géométrie dans  $\mathbb{R}^3$  et déterminants

**Exercice 1.** Déterminer si les familles de vecteurs suivantes sont libres :

1.  $u = (2, -1, 0)$ ,  $v = (0, 1, 2)$ ,  $w = (1, 1, 3)$  ;
2.  $u = (1, 1, 0)$ ,  $v = (4, 1, 4)$ ,  $w = (2, -1, 4)$  ;
3.  $u = (2, 0, -3)$ ,  $v = (-6, 1, 9)$ .

**Exercice 2.** Pour quelles valeurs de  $m \in \mathbb{R}$  les vecteurs suivants sont-ils libres ?

$$u = (1, -1, 2) \quad v = (-m, 3, 2) \quad w = (1, 2m, -5).$$

**Exercice 3.** Soient  $u$ ,  $v$  et  $w$  trois vecteurs libres de  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que la famille  $\{u, 3u - v, 2u + v + w\}$  est une famille libre.

**Exercice 4.** Soit  $D$  la droite d'équations

$$D : \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ x + y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

1. Donner une équation paramétrique de  $D$  en utilisant le produit vectoriel, puis le pivot de Gauss ;
2. Donner une équation paramétrique, puis implicite du plan perpendiculaire à  $D$  et passant par le point  $(0, 1, -1)$ .

**Exercice 5.** Dans  $\mathbb{R}^3$  on considère les points  $A = (1, 1, 0)$ ,  $B = (2, 0, -1)$  et  $C = (-1, 4, 2)$ .

1. Donner une équation paramétrique du plan  $P$  contenant  $A$ ,  $B$  et  $C$  ;
2. Donner une équation cartésienne de  $P$  ;
3. Donner une équation du plan parallèle à  $P$  et passant par le point  $(1, 1, 1)$ .

**Exercice 6.** Calculer la valeur des déterminants suivants

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & ab & a^2+b^2 \\ (c+b)^2 & cb & c^2+b^2 \\ (a+c)^2 & ac & a^2+c^2 \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}$$

où  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .