Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 4
Déterminant et produit vectoriel

Calcul de déterminants

Exercice 1. Soient les déterminants $D1 := \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ et $D2 := \begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

1. Calculer $D1$.
2. Calculer $D2$ de trois manières différentes :
   (a) en développant suivant la première colonne.
   (b) en développant suivant la première ligne.
   (c) en utilisant la règle de Sarrus.

Exercice 2. Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 := \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}, D_2 := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, D_3 := \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix},$$

$$D_4 := \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}, D_5 := \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, D_6 := \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{29} & -3 \\ -1 & \pi + e & 3 \\ i & \cos(5) & -3i \end{vmatrix}$$

Exercice 3. Soient a, b, c des réels, calculer les déterminants suivants :

$$D_1 := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}, D_2 := \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$D_3 := \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}, D_4 := \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, D_5 := \begin{vmatrix} 1 & \cos^2(a) & \sin^2(a) \\ 1 & \cos^2(b) & \sin^2(b) \\ 1 & \cos^2(c) & \sin^2(c) \end{vmatrix}$$

Déterminants et géométrie

Exercice 4. Soient les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

Exercice 5. Déterminer si les points A, B, C et D suivants sont coplanaires :

1. $A = (1, 1, 0)$, $B = (2, 0, -1)$, $C = (1, 2, 3)$ et $D = (-1, 4, 2)$.
2. $A = (2, -1, 0)$, $B = (0, -4, 5)$, $C = (4, -13, 13)$ et $D = (-4, 5, -3)$.

Exercice 6. En utilisant le déterminant, donner une équation du plan :

1. passant par les points $A = (1, 0, 2)$, $B = (-1, 4, 2)$ et $C = (3, -2, -1)$.
2. contenant le point $A = (-1, 4, 2)$ et contenant la droite

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$$

3. contenant les deux droites

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \qquad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 4x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

Exercice 7. En utilisant le déterminant, déterminer si la droite et le plan suivants sont parallèles ou sécants :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \mathcal{P} : 4x - 3y + 7z - 7 = 0$$

Indication : on pourra utiliser le déterminant sous la forme du produit mixte.

Produit vectoriel

Exercice 8. Soient A, B, C et D quatre points de $\mathbb{R}^3$. Montrer que :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = 0$$

Exercice 9. Soient trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

1. Montrer que $|(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}| \leqslant \| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{v} \| \| \overrightarrow{w} \|$.
2. On suppose que $|(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}| = \| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{v} \| \| \overrightarrow{w} \|$. Que peut-on dire des trois vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$?

Exercice 10. Soient deux vecteurs $\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. trouver un vecteur $\overrightarrow{C}$ tel que $\overrightarrow{C}$ soit normal au plan défini par $(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$.
2. trouver un vecteur $\overrightarrow{D}$ dans le plan $(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$ et normal à $\overrightarrow{A}$.
3. calculer $(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}) \wedge \overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{A} \wedge (\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{D})$. Conclure.

Exercice 11. On considère le tétraèdre de sommets $A = (1, 1, 1), B = (-1, 2, 1), C = (5, 2, 3)$ et D dans une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. Trouver les coordonnées du point D, sachant qu'il appartient à la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $X = (1, 0, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, et que le volume du tétraèdre est 5.