Feuille d'exercices n° 3
Droites et plans de $\mathbb{R}^3$

Droites de $\mathbb{R}^3$

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les points $A = (1, 0, 1)$ et $B = (-1, 2, 2)$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. Donner une représentation implicite de (AB).

Exercice 2. On considère dans l'espace la droite D d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} 5x - 7y + 21z + 4 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Donner une représentation paramétrique de D.

Exercice 3.

1. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ de vecteur directeur u et passant par A et M un point n'appartenant pas à D. En raisonnant dans le plan défini par D et M, montrer que la distance de M à D est donnée par
$$d(M, D) = \frac{||u \wedge \overrightarrow{AM}||}{||u||}$$
2. Calculer les distances $d(D, M)$ dans les cas suivants
$$M = (4, -3, 2) \quad A = (1, 0, -1) \quad u = (2, -1, 3) \quad \text{et} \quad M = (2, -1, 1) \quad \begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

Plans de $\mathbb{R}^3$

Exercice 1. Déterminer une équation du plan :

1. passant par le point $A = (1, -1, 2)$ et orthogonal au vecteur $u = (2, -3, 1)$.
2. passant par le point $A = (0, 1, -1)$ et parallèle au plan d'équation $2x - 3y + z - 1 = 0$.

Exercice 2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ non-nuls. On considère les points $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$ et $C = (0, 0, c)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'une équation cartésienne du plan passant par A, B et C est

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Exercice 3.

1. Donner une équation du plan engendré par les vecteurs $u = (1, 3, -1)$ et $v = (-2, -6, 2)$ et passant par le point $A = (1, 2, 1)$.
2. Donner une équation du plan engendré par les vecteurs $u = (2, -1, 3)$ et $v = (-1, 4, 5)$ et passant par le point $A = (1, 0, 2)$.
3. Donner une équation du plan passant par les points $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 0, 1)$ et $C = (-1, 2, 4)$.

Exercice 4. On considère dans l'espace le plan P défini paramétriquement par

$$\begin{cases} x = 2s - t \\ y = s + t + 1 \\ z = s - 3t - 1 \end{cases}$$

où $s, t \in \mathbb{R}$.

1. Donner deux vecteurs engeandrant P et un point appartenant à P.
2. Donner l'équation cartésienne de P.

Exercice 5. Donner une équation du plan contenant les deux droites suivantes

$$D_1 : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} 3x - y - z + 5 = 0 \\ x + -z + 1 = 0 \end{cases}$$

Indication : on pourra passer en équations paramétriques.

Exercice 6. Discuter de la configuration des plans suivants. S'ils sont sécants, donner un vecteur directeur de $(P_1) \cap (P_2)$.

$$P_1 : x + y + z + 1 = 0 \qquad P_2 : 2x - y + 3z + 2 = 0.$$

Exercice 7. Soit $P : ax + by + cz + d = 0$ un plan de $\mathbb{R}^3$ et $M = (x_0, y_0, z_0)$ un point n'appartenant pas à P.

1. Donner une équation paramétrique de la droite passant par M et perpendiculaire à P.
2. En déduire que la distance $d(M_0, D)$ de M à D est donnée par

$$d(M_0, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^b + b^2 + c^2}}$$

Exercice 8. On considère les droites D_1 et D_2 d'équations

$$\begin{cases} y - 3x - 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - z + 4 = 0 \\ y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer un vecteur perpendiculaire à D_1 et D_2. En déduire la forme générale de l'équation des plans parallèles à D_1 et D_2.
2. Em choisissant un point appartenant à chacune des droites, déterminer une équation du plan équidistant et parallèle à D_1 et D_2.

Exercice 9. On considère la droite D d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

1. Donner une représentation implicite de D. En déduire une équation paramétrique du plan P orthogonal à D et passant par le point $(-2, 1, 3)$.
2. Déterminer l'équation cartésienne de P et en déduire son intersection avec D.