

FEUILLE D'EXERCICES 2/7  
Vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Vecteurs libres ou liés

1. Pour quelles valeurs de  $k \in \mathbb{R}$  les vecteurs  $u$  et  $v$  sont-ils liés ?
  - (1)  $u = (1, 2, -1), v = (2, k, -2)$
  - (2)  $u = (k, k, 3), v = (1, -1, k)$
  - (3)  $u = (2k, k, 2), v = (k, 2, 1)$
  
2. Les vecteurs suivants sont-ils libres ?
  - (1)  $u = (1, -2, 1), v = (2, -4, 1)$
  - (2)  $u = (2, -1, 1), v = (1, -1/2, 1/2)$
  - (3)  $u = (1, -2, 1), v = (2, 2, -1), w = (7, -4, 1)$
  - (4)  $u = (2, 0, -1), v = (1, -1, 2), w = (0, 2, -5)$
  - (5)  $u = (1, 2, -1), v = (-1, 1, -1), w = (1, 5, -2)$
  - (6)  $u = (13, 2, -17), v = (-11, 27, -1), w = (0, 0, 0)$
  - (7)  $u = (1, 1, 1), v = (3, 0, -1), w = (-1, 1, -1)$
  - (8)  $u = (1, 2, 3), v = (3, 0, -1), w = (1, 8, 13)$
  - (9)  $u = (1, 2, -3), v = (1, 0, -1), w = (1, 10, -11)$
  - (10)  $u = (1, -3, 7), v = (2, 0, -6), w = (3, -1, -1), t = (2, -1, 5)$
  
3. Soit  $u = (3, 2, -1), v = (x, 7, x')$  et  $w = (-2, y, y')$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .
  - (1) Déterminer une condition sur  $x$  et  $x'$  pour que la famille  $(u, v)$  soit liée.
  - (2) Déterminer une condition sur  $y$  et  $y'$  pour que la famille  $(u, w)$  soit liée.
  - (3) Que peut-on alors dire de  $v$  et  $w$  ?
  
4. Soit  $u = (3, 1, 6), v = (1, 1, 4)$  et  $w = (1, 0, m)$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Déterminer les valeurs de  $m$  pour que  $u, v$  et  $w$  soient libres.
  
5. On considère les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  suivants :  
 $u = (0, 3, 1), v = (-1, h, \frac{1}{3}), w = (k, 1, \frac{h}{3}), x = (m + 2, m - 1, 1), y = (4, m - 1, 1)$   
et  $z = (2, m - 1, 0)$ , avec  $h, k$  et  $m$  réels.
  - (1) A quelle condition la famille  $(x, y)$  est-elle libre ? Même question pour  $\{y, z\}$ .
  - (2) Pour quelles valeurs de  $h$  et  $k$ , la famille  $(u, v, w)$  est-elle libre ?
  
6. Soit  $(a, b, c)$  une famille libre de  $\mathbb{R}^3$ . Déterminer parmi les familles suivantes celles qui sont libres et celles qui sont liées.  
 $(a, b), (a + b, a - b), (a + 2b, 3a - 6b), (a + c, b + c, c), (3a + 2b + c, a + b - c, -a + c),$   
 $(a - b + c, a + b - c, a - 3b + 3c), (10a + b + 2c, a + 5b - c, 3a + 4b + c, a + 2b + 3c).$