Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 1
Nombres complexes et géométrie

Nombres complexes

Exercice 1. Mettre sous forme cartésienne les nombres complexes suivant :

$$\frac{3+2i}{1-i} \qquad \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i} \qquad e^{e^{is}} \text{ où } s \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2. Mettre sous forme eulérienne les nombres complexes suivant :

$$\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2} \qquad (\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i})^{20} \qquad \frac{1+i\tan(\alpha)}{1-i\tan(\alpha)} \qquad e^{it}+e^{is} \text{ où } s,t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. Dessiner les parties du plan complexe respectivement définies par :

$$|\Im m\, z|<1, \quad |z-i|>1, \quad |\pi-\arg z|<\frac{\pi}{4}.$$

Exercice 4. Déterminer le paramètre réel a pour que le nombre complexe

$$z=\frac{1+ai}{2a+(a^2-1)i}$$

soit imaginaire pur.

Exercice 5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k\alpha) \qquad \sum_{k=0}^{n}\sin(k\alpha)$$

Exercice 6. Exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les expressions $\cos(3x)$, $\sin(3x)$.

Exercice 7. Linéariser les expressions suivantes

$$\cos^2(x)\sin(x) \qquad \cos^3(x)\sin^2(x).$$

Exercice 8. Calculer le sinus et le cosinus de $\pi/12$ en remarquant que $1/12 = 1/3 - 1/4$, puis en calculant les parties réelles et imaginaires de $\exp(2i\pi/3)/\exp(2i\pi/4)$.

Exercice 9. Calculer le sinus et le cosinus de $\pi/5$. (Indication : l'équation $P(z)=z^4+z^3+z^2+z+1=0$, grâce à sa symétrie d'*équation réciproque* ($z^4P(1/z)=P(z)$), se ramène à des équations du second degré par le changement de variable $u=z+1/z$.)

Exercice 10. En posant $p=a+b$ et $q=a-b$, factoriser

$$\cos p+\cos q \quad \text{et} \quad \sin p+\sin q.$$

Équations. Racines n-ièmes.

Exercice 11.

1. Trouver les racines carrées de
$$z_0 = 8 - 6i \qquad z_1 = 3 + 4i$$
2. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.
$$z^2 - (2+i)z + (i+7) = 0 \qquad z^2 - iz - (1+i) = 0 \qquad z^2 + (2-4i)z - (3+4i) = 0$$

Exercice 12. Résoudre dans $\mathbb{C}$
$$1 + +z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0$$

Exercice 13. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes
$$\bar{z}^7 = \frac{1}{z^3} \qquad z^4 = z + \bar{z}$$

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation
$$(z+1)^n - (z-1)^n = 1 \qquad (z+i)^n = z^n$$

Géométrie dans $\mathbb{C}$

Exercice 15. Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Prouver la formule du parallélogramme
$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$
Donner une interprétation géométrique de cette formule.

Exercice 16. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de rayon r et de centre O et $A, B, C \in \mathcal{C}$. En utilisant les nombres complexes, montrer que $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$.

Exercice 17. Soient A, B, C des points du plan, d'affixes respectifs a, b, c. On note $j = e^{i\pi/3}$. Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + cj + bj^2 = 0$.

Exercice 18. Carré et losange.

1. Montrer que les diagonales d'un carré sont de même longueur et perpendiculaires.
2. Montrer que les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

Exercice 19. On considère les transformations du plan complexe $f_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ suivantes :
$$f_1(z) = e^{i\pi/3} z + 1 \quad \text{et} \quad f_2(z) = -z + 2.$$
Identifier les f_i et les $f_i \circ f_j$ $(i, j \in \{1, 2\})$.

Exercice 20. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$. On considère la similitude indirecte f définie par

$$f(z) = e^{i\theta} z + b.$$

1. Écrire les équations donnant les coordonnées (x, y) des points fixes de g.
2. À quelle condition sur θ et b la similitude f est-elle une symétrie orthogonale ? Dans ce cas, expliciter l'axe de symétrie.