

# Groupes de Grothendieck-Teichmüller

Action galoisienne, espaces de modules et tours

Benjamin Collas

Institut de Mathématiques de Jussieu  
Séminaire des thésards de l'Institut

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Représentation galoisienne géométrique</b>	<b>2</b>
1.1	Représentation galoisienne géométrique . . . . .	2
1.1.1	Monodromie et séries de Puiseux . . . . .	2
1.1.2	Représentation géométrique . . . . .	2
1.2	La droite projective moins 3 points . . . . .	3
1.2.1	Action explicite sur $x$ . . . . .	3
1.2.2	Action explicite sur $y$ . . . . .	3
1.3	$\mathbb{P}^1\overline{\mathbb{Q}} - \{0, 1, \infty\}$ et symétries . . . . .	4
1.3.1	Une loi de composition interne . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Espaces de modules de courbes en genre 0</b>	<b>5</b>
2.1	Espaces de modules et mapping class groups . . . . .	5
2.2	Mapping class groups et tresses . . . . .	5
2.2.1	Mapping class groups et tresses . . . . .	5
2.2.2	Représentation et $B_n$ . . . . .	6
2.3	Action galoisienne et $\widehat{GT}$ . . . . .	6
2.3.1	Définition de $\widehat{GT}$ . . . . .	6
2.3.2	$G_{\mathbb{Q}}$ , $\widehat{GT}$ et tresses d'Artin . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Avatars de <math>\widehat{GT}</math> et tours</b>	<b>7</b>
3.1	Automorphismes de tour . . . . .	7
3.1.1	Automorphismes de tours . . . . .	7
3.2	Principe des 2 niveaux . . . . .	7
3.3	La tour des $\{\Gamma_{g,n}^r\}$ . . . . .	8
3.3.1	Espaces de module $\mathcal{M}_{g,n}$ . . . . .	8
3.3.2	Un jeux de lego topologique . . . . .	8
3.3.3	Conclusion . . . . .	9

## Résumé

Suivant l'idée de Grothendieck, nous étudions  $G_{\mathbb{Q}}$  à travers son action sur différents groupes fondamentaux  $\pi_1^{geom}(X)$ .

Guidés par les symétries de  $\mathbb{P} - \{0, 1, \infty\}$ , nous définirons le groupe de Grothendieck-Teichmüller  $\widehat{GT}$  grâce aux espaces de modules  $\mathcal{M}_{0,[n]}$ .

L'étude de la catégorie des  $(\mathcal{M}_{g,n})_{g,n}$  nous permettra d'aborder la question de  $G_{\mathbb{Q}}$  en tant que groupe d'automorphisme de tour.

$$G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Aut}(\widehat{\pi}_1^{top}(X(\mathbb{C})))$$

# 1 Représentation galoisienne géométrique

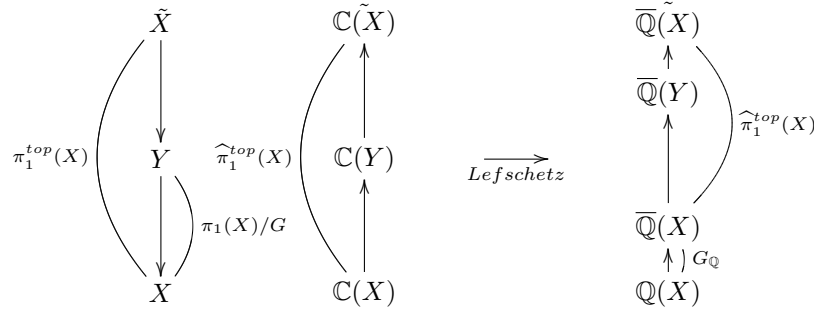
## 1.1 Représentation galoisienne géométrique

### La suite exacte fondamentale

Soit  $X$  une variété lisse absolument irréductible sur  $\mathbb{Q}$ .

$$\text{où } G_{\mathbb{Q}} = \varprojlim Gal(K/\mathbb{Q}) \text{ et } \pi_1^{alg}(X \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}) \simeq \varprojlim \pi_1^{top}(X(\mathbb{C}))/G = \widehat{\pi}_1^{top}(X(\mathbb{C})).$$

Expliquons d'où provient cette suite :



### 1.1.1 Monodromie et séries de Puiseux

Donnons une nouvelle identification de  $\widehat{\pi}_1^{top}(X(\mathbb{C}))$ , à travers l'exemple de  $X_3 = \mathbb{P} - \{0, \infty\}$ .

- Les extensions finies de corps de fonctions  $Y(\mathbb{C})/X_3(\mathbb{C})$  s'identifient aux extensions  $\bar{\mathbb{Q}}((t^{1/k}))/\bar{\mathbb{Q}}((t))$ .
- Puisque  $X_3 = \mathbb{C} - \{0\}$ , on identifie  $\pi_1^{top}(X_3) = \langle x \rangle$
- Au lieu d'un point base, considérons un *point base tangentiel* en 0.

#### Propriété [Deligne]

Un point base tangentiel définit un point base pour le  $\pi_1$ .

- L'identification se fait via l'action monodromique

$$\pi_1^{top}(X_3) \rightarrow Gal(M/\bar{\mathbb{Q}}((t)))$$

$$\gamma \mapsto (f = \sum_n a_n t^{\frac{n}{k}} \mapsto \begin{matrix} \text{prolongement de} \\ f \text{ au bout de } \gamma \end{matrix})$$

où  $M$  est l'extension galoisienne maximale non ramifiée en dehors de 0 et  $\infty$ .

- On calcule l'action de  $x$

$$x(\sum_n a_n t^{\frac{n}{k}}) = \sum_n a_n \zeta^n t^{\frac{n}{k}} \text{ où } \zeta = \exp(2i\pi/k)$$

### 1.1.2 Représentation géométrique

Reprenons la suite exacte fondamentale

$$1 \longrightarrow \widehat{\pi}_1^{top}(X(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_1^{alg}(X) \longrightarrow G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 1 \quad (\text{SEF})$$

$$1 \longrightarrow \widehat{\pi}_1^{top}(X(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_1^{alg}(X) \xrightarrow{\leftarrow s} G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 1 \quad (\text{SFE})$$

- Cette suite conduit à une *représentation géométrique extérieure*

$$G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Out}(\widehat{\pi}_1^{top}(X(\mathbb{C})))$$

où  $\text{Out}(G) := \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$ .

- Le choix d'une section  $s$  détermine un point base  $\mathbb{Q}$ -rationnel pour  $\pi_1^{alg}(X)$ .

On obtient alors une *vraie représentation géométrique*

$$G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Aut}(\widehat{\pi}_1^{top}(X(\mathbb{C})))$$

$$\sigma \mapsto (\gamma \mapsto \sigma \gamma \sigma^{-1})$$

## 1.2 La droite projective moins 3 points

Considérons l'espace  $X_4 = \mathbb{P}^1\overline{\mathbb{Q}} - \{0, 1, \infty\}$ . Modulo le choix d'un point base rationnel,  $\pi_1^{top}(X_4) = \mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle$ . La SEF donne

$$G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Aut}(\widehat{\mathbb{F}}_2).$$

Il y a même mieux, d'après un théorème de *Belyi*

**Théorème (Belyi)**

$$G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \text{Aut}(\widehat{\mathbb{F}}_2).$$

Afin de conserver les symétries de  $X_4$ , reprenons des points bases tangentiels :

Pour ne pas briser les symétries, nous utiliserons

- Les 6 points bases tangentiels de  $X_4$

$$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{01}, \overrightarrow{10}, \overrightarrow{1\infty}, \overrightarrow{\infty 1}, \overrightarrow{\infty 0}, \overrightarrow{0\infty}\}$$

- Le groupoïde fondamental topologique  $\pi_1^{top}(X_4, \mathcal{B})$  constitué des chemins d'un point base tangentiel à un autre, modulo homotopie.

### 1.2.1 Action explicite sur $x$

Rappelons l'action monodromique sur les séries de Puiseux

$$\widehat{\pi}_1^{top}(X) \simeq \text{Gal}(M/\overline{\mathbb{Q}}((t)))$$

où  $M$  extension galoisienne maximale non-ramifiée en dehors de 0, 1 et  $\infty$ .

- L'action galoisienne sur  $x$  est explicitement donnée par

$$\sigma.x = \sigma x \sigma^{-1}$$

- Appliquant cette formule dans une extension  $\overline{\mathbb{Q}}((t^{1/k}))/\overline{\mathbb{Q}}((t))$

$$\sum_n a_n t^{\frac{n}{k}} \xrightarrow{\sigma^{-1}} \sum_n \sigma^{-1}(a_n) t^{\frac{n}{k}} \xrightarrow{x} \sum_n \sigma^{-1}(a_n) \zeta^n t^{\frac{n}{k}} \xrightarrow{\sigma} \sum_n a_n \zeta^{n\chi(\sigma)} t^{\frac{n}{k}}$$

où  $\chi(\sigma)$  est le caractère cyclotomique.

On obtient ainsi

$$\sigma.x = x^{\chi(\sigma)}$$

### 1.2.2 Action explicite sur $y$

L'action sur  $y$  provient d'une symétrie de  $X_4$  : rappelons que

$$\text{Aut}(X_4) = S_3 = \langle \omega, \theta \rangle$$

$$\theta : t \mapsto 1 - t \quad \omega : t \mapsto (1 - t)^{-1}$$

- Considérant  $p \in \pi_1(X_4; \overrightarrow{01}, \overrightarrow{10})$ , on remarque

$$y = p^{-1}\theta(x)p.$$

- Un calcul similaire à l'action de  $G_{\mathbb{Q}}$  sur  $x$  fait apparaître l'élément

$$f_{\sigma}(x, y) := p^{-1}\sigma p \in \widehat{\mathbb{F}}_2'.$$

Et l'action galoisienne devient

$$\sigma.y = f_{\sigma}^{-1}(x, y)y^{\chi(\sigma)}f_{\sigma}(x, y)$$

En conclusion

**Théorème A**

Il existe une action fidèle

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{Q}} &\hookrightarrow \text{Aut}(\widehat{\mathbb{F}}_2) \\ \sigma &\mapsto \phi_{\sigma} \end{aligned}$$

définie par

$$\phi_{\sigma}(x) = x^{\chi(\sigma)}, \quad \phi_{\sigma}(y) = f_{\sigma}^{-1}(x, y)y^{\chi(\sigma)}f_{\sigma}(x, y),$$

où  $\chi(\sigma)$  est le caractère cyclotomique, et  $f_{\sigma} \in \widehat{\mathbb{F}}_2'$ .

**Question**

Comment utiliser cette action, et les couples  $(\chi(\sigma), f_{\sigma})$ , pour obtenir un groupe contenant des informations sur  $G_{\mathbb{Q}}$  ?

### 1.3 $\mathbb{P}^1\overline{\mathbb{Q}} - \{0, 1, \infty\}$ et symétries

Une réponse partielle est donnée par :

#### Théorème B

Il existe une paramétrisation

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{Q}} &\rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}^* \times \widehat{\mathbb{F}}'_2 \\ \sigma &\mapsto (\chi_{\sigma}, f_{\sigma}) \end{aligned}$$

où,  $f_{\sigma}$  vérifie les deux équations

$$(I) \quad f_{\sigma}(x, y)f_{\sigma}(y, x) = 1$$

$$(II) \quad f_{\sigma}(z, x)z^{m_{\sigma}}f_{\sigma}(y, z)y^{m_{\sigma}}f_{\sigma}(x, y)x^{m_{\sigma}} = 1 \quad \text{où } z = (xy)^{-1} \text{ and } m_{\sigma} = \frac{1}{2}(\chi_{\sigma} - 1)$$

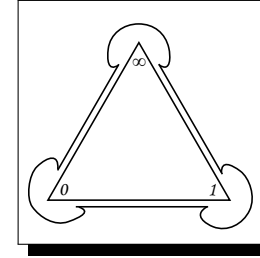
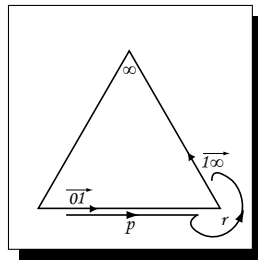
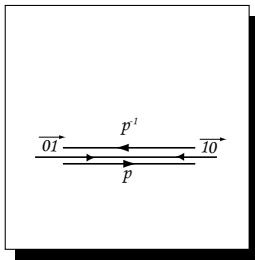
Ces 2 relations proviennent des symétries de  $X_4$  :

(I) est obtenue en appliquant  $\sigma$  à la relation géométrique

$$\theta(p)p = 1 \text{ implique } f_{\sigma}(x, y)f_{\sigma}(y, x) = 1$$

(II) Soit  $q = r \circ p \in \pi_1(X_4; \vec{01}, \vec{1\infty})$  et  $\omega : t \mapsto (1-t)^{-1} \in \text{Aut}(X_4)$ . Alors

$$\omega^2(q)\omega(q)q = 1 \quad \text{implique (II)}$$



#### 1.3.1 Une loi de composition interne

Utilisant la paramétrisation précédente, on définit

##### Définition

On appelle  $GT_0$  l'ensemble des éléments  $(\chi_{\sigma}, f_{\sigma}) \in \widehat{\mathbb{Z}}^* \times \widehat{\mathbb{F}}'_2$  vérifiant les relations

$$(I) \quad f(x, y)f(y, x) = 1$$

$$(II) \quad f(z, x)z^m f(y, z)y^m f(x, y)x^m = 1 \quad \text{où } m = (\lambda - 1)/2,$$

Puisque pour  $\sigma, \tau \in G_{\mathbb{Q}} \subset \widehat{\mathbb{Z}}^* \times \widehat{\mathbb{F}}'_2$ , on calcule

$$\begin{aligned} x &\xrightarrow{\tau} x^{\chi_{\tau}} \xrightarrow{\sigma} x^{\chi_{\tau}\chi_{\sigma}} \\ y &\xrightarrow{\tau} f_{\tau}^{-1}y^{\chi_{\tau}}f_{\tau} \xrightarrow{\sigma} F_{\sigma}^{-1}(f_{\tau})f_{\sigma}^{-1}y^{\chi_{\tau}\chi_{\sigma}}f_{\sigma}F_{\sigma}(f_{\tau}) \end{aligned}$$

l'on étend cette loi de groupe

##### Propriété

L'ensemble  $GT_0$  est muni d'une loi de composition interne définie par

$$(\chi_{\sigma}, f_{\sigma}) \cdot (\chi_{\tau}, f_{\tau}) := (\chi_{\sigma}\chi_{\tau}, f_{\sigma}F_{\sigma}(f_{\tau})).$$

##### Attention :

L'ensemble ainsi formé et muni de cette loi de composition interne n'est pas un groupe.

## 2 Espaces de modules de courbes en genre 0

### Stratégie

Étudier de "bons" espaces géométriques qui généralisent les résultats de  $X_4$  afin d'obtenir :

- une représentation moins théorique, plus calculable ;
- un nouveau groupe qui capturera les propriétés fondamentales de  $G_{\mathbb{Q}}$ .

### 2.1 Espaces de modules et mapping class groups

Soit  $S_{0,n}$  la sphère topologique à  $n$  points marqués  $(x_1, \dots, x_n)$ .

#### Definition

Soit  $\mathcal{M}_{0,n}$  l'espace de modules des surfaces de Riemann de genre 0 à  $n$  points marqués. Ou de façon équivalente, l'espace des structures analytiques de  $S_{0,n}$  modulo isomorphisme.

- Exemple :  $\mathcal{M}_{0,n} = (\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\})^{n-3} - \Delta$  est une variété algébrique. Remarquons que notre ancien  $X_4 = \mathcal{M}_{0,4}$ .
- On a  $\text{Aut}(\mathcal{M}_{0,n}) = S_n$ . Guidés par l'étude de  $X_4$ , considérons l'espace non-ordonné  $\mathcal{M}_{0,[n]} = \mathcal{M}_{0,n}/S_n$  qui possède une structure d'*orbifold topologique* ou de  *$\mathbb{Q}$ -champs algébrique*.

Dans ce contexte :

$$\Gamma_{0,n} := \pi_1^{\text{top}}(\mathcal{M}_{0,n}) \text{ et } \pi_1^{\text{alg}}(\mathcal{M}_{0,n}) = \widehat{\Gamma}_{0,n} \text{ en tant que variété algébrique}$$

$$\Gamma_{0,[n]} := \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{M}_{0,[n]}) \text{ en tant qu'orbifold et } \pi_1^{\text{alg}}(\mathcal{M}_{0,[n]}) = \widehat{\Gamma}_{0,[n]} \text{ comme orbifold}$$

Dans le cadre des champs algébriques :

- Suivant *Knudsen* et *Deligne-Mumford*, on peut compactifier l'espace de module  $\mathcal{M}_{0,[n]}$ . On dispose alors d'une notion de *point base tangentiel* dans  $\mathcal{M}_{0,[n]}$ , en tant que *point base à l'infini*,

- Suivant *Oda*, il existe une suite fondamentale exacte de groupoïdes fondamentaux  $\pi_1(\mathcal{M}_{0,[n]}, \mathcal{B})$  analogue à la Suite Exacte Fondamentale. On obtient ainsi une généralisation de l'exemple de  $\mathbb{P} - \{0, 1, \infty\}$  :

#### Théorème

Pour  $n \geq 4$ , il existe un plongement

$$G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \text{Aut}(\widehat{\Gamma}_{0,[n]}).$$

#### Question :

En quoi ce contexte géométrique d'espaces de modules  $\mathcal{M}_{0,[n]}$  fournit-il une action galoisienne explicite et calculable ?

### 2.2 Mapping class groups et tresses

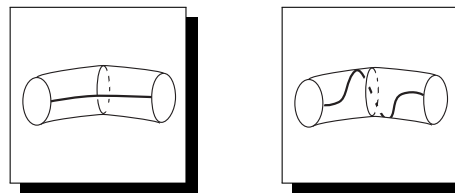
#### 2.2.1 Mapping class groups et tresses

Les chemins de  $\mathcal{M}_{0,n}$  entre deux points sont des déformations continues des structures analytiques, ie

#### Théorème [Dehn, Lickorish]

$$\Gamma_{0,n} = \text{Diff}^+(S_{0,n})/\text{Diff}^0(S_{0,n}) \quad \Gamma_{0,[n]} = \text{Diff}^+(S_{0,[n]})/\text{Diff}^0(S_{0,[n]})$$

Ces groupes sont engendrés par des twists de Dehn le long de courbes :



#### Théorème [Dehn]

- Le *pure mapping class group*  $\Gamma_{0,n}$  est engendré par les twists de Dehn le long de courbes évitant les points marqués.
- Le *full mapping class group*  $\Gamma_{0,[n]}$  est engendré par les twists de Dehn le long de boucles évitant les points marqués ou traversant 2 points (appelés demi-twist).

**Définition**

Le groupe des tresses d'Artin  $B_n$  est engendré par les générateurs  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  avec les relations

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i - j| > 1 \quad \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ sinon.}$$

Le groupe des tresses colorées  $K_n \subset B_n$  admet comme générateurs  $x_{ij} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}$

**Proposition**

Soit  $\gamma_i$  une boucle fermée simple passant à travers 2 points marqués  $x_i$  et  $x_{i+1}$ . Soit  $\tau_i$  le demi-twist ainsi défini. Le morphisme  $\tau_i \in \Gamma_{0,[n]} \rightarrow \sigma_i \in B_n$  est alors un isomorphisme

$$\Gamma_{0,[n]} \simeq B_n / \langle y_n, \omega_n \rangle \quad \Gamma_{0,n} \simeq K_n / Z$$

où  $\omega_n = (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})^n$ ,  $y_n = \sigma_{n-1} \sigma_{n-2} \cdots \sigma_1^2 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}$  où  $Z = \langle \{x_{1i} x_{2i} \cdots x_{ni}\}_{2 \leq i \leq n} \rangle$ .

**2.2.2 Représentation et  $B_n$** 

L'utilisation des tresses permet enfin d'obtenir une action explicite (originellement due à Drinfel'd) sur tous les  $\widehat{\Gamma}_{0,[n]}$

**Theorem [Drinfel'd, Ihara and Matsumoto]**

Il existe une paramétrisation  $G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \text{Aut}(\widehat{B}_n)$  qui passe à  $\widehat{\Gamma}_{0,[n]} = \widehat{B}_n / \langle y_n, \omega_n \rangle$ .

Elle est donnée par

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{Q}} &\hookrightarrow \text{Aut}(\widehat{B}_n) \\ \sigma &\mapsto \sigma_1 \mapsto \sigma_1^{\chi_\sigma} \\ &\quad \sigma_i \mapsto f(y_i, \sigma_i^2)^{-1} \sigma_i^{\chi_\sigma} f(y_i, \sigma_i^2) \text{ pour } 2 \leq i \leq n-1 \end{aligned}$$

où  $y_i = \sigma_{i-1} \sigma_{i-2} \cdots \sigma_1^2 \cdots \sigma_{i-2} \sigma_{i-1}$ .

**2.3 Action galoisienne et  $\widehat{GT}$** 
**2.3.1 Définition de  $\widehat{GT}$** 

Ajoutons une relation aux relations (I) et (II) obtenues dans  $\mathcal{M}_{0,4}$ .

Considérant l'action de  $G_{\mathbb{Q}}$  sur  $\widehat{\Gamma}_{0,5}$  ainsi que certaines symétries de  $\mathcal{M}_{0,5}$ , on obtient de façon similaire

$$(III) \quad \tilde{f}(x_{34}, x_{45}) \tilde{f}(x_{51}, x_{12}) \tilde{f}(x_{23}, x_{34}) \tilde{f}(x_{45}, x_{51}) \tilde{f}(x_{12}, x_{23}) = 1$$

dans  $\widehat{\Gamma}_{0,5}$ , où  $\tilde{f}$  est l'image de  $f$  par  $\widehat{\mathbb{F}}_2 \hookrightarrow \widehat{\Gamma}_{0,5}$ .

Reprenant la LCI découlant de  $G_{\mathbb{Q}}$ , on munit  $GT_0$  d'une structure de groupe

**Definition [Drinfel'd]**

Définissons  $\widehat{GT}$  comme le groupe des éléments  $(\lambda, f) \in \widehat{\mathbb{Z}}^* \times \widehat{\mathbb{F}}_2'$  tel que  $(x, y) \mapsto (x^\lambda, f y^\lambda f^{-1})$  induise un automorphisme de  $\widehat{\mathbb{F}}_2$ , et qui satisfait

- (I)  $f(x, y) f(y, x) = 1$
- (II)  $f(z, x) z^m f(y, z) y^m f(x, y) x^m = 1$  où  $m = (\lambda - 1)/2$
- (III)  $\tilde{f}(x_{34}, x_{45}) \tilde{f}(x_{51}, x_{12}) \tilde{f}(x_{23}, x_{34}) \tilde{f}(x_{45}, x_{51}) \tilde{f}(x_{12}, x_{23}) = 1$  (où  $\tilde{f}$  est l'image de  $f$  in  $\widehat{\Gamma}_{0,5}$ ).

**2.3.2  $G_{\mathbb{Q}}$ ,  $\widehat{GT}$  et tresses d'Artin**

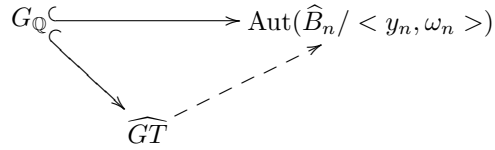
Le résultat essentiel est alors le suivant :

**Théorème [Ihara-Drinfel'd]**

Il existe un morphisme qui prolonge l'action galoisienne sur  $\mathcal{M}_{0,4}$  et  $\mathcal{M}_{0,5}$

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{Q}} &\hookrightarrow \widehat{GT} \\ \sigma &\mapsto (\chi(\sigma), f_\sigma) \end{aligned}$$

et ce de façon compatible avec l'action sur les groupes de tresses



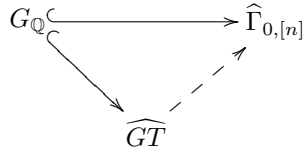
### 3 Avatars de $\widehat{GT}$ et tours

#### Stratégie

On considère le groupe d'automorphismes  $\text{Aut}(\pi_1(X))$ , où  $X$  est une catégorie, ou famille, d'objets géométriques afin :

- de respecter davantage de propriétés de  $G_{\mathbb{Q}}$ ,
- de diminuer la taille de  $\text{Aut}(\pi_1(X))$  et chercher l'isomorphisme avec  $G_{\mathbb{Q}}$ .

On illustre ici le principe des 2 niveaux des espaces de modules  $\mathcal{M}_{g,n}$ .



### 3.1 Automorphismes de tour

#### 3.1.1 Automorphismes de tours

Au lieu de considérer un unique objet  $X$ , considérons une catégorie  $\mathcal{T}$ . Appliquant le foncteur  $\pi_1$ , on obtient une nouvelle catégorie  $\mathcal{T}_{\pi}$ .

#### Définition

Le groupe des automorphismes d'une tour  $\text{Out}(\mathcal{T}_{\pi})$  est constitué des suites  $(\psi_X)_{X \in \mathcal{T}_{\pi}}$  pour  $\psi_X \in \text{Out}(\pi_1(X))$  compatibles aux morphismes de la tour (modulo automorphismes intérieurs).

On s'inspire de deux propriétés de  $G_{\mathbb{Q}}$

#### Propriétés

- Le groupe  $G_{\mathbb{Q}}$  préserve les  $\mathbb{Q}$ -morphisms entre  $\mathbb{Q}$ -surfaces,
- Le groupe  $G_{\mathbb{Q}}$  préserve les sous-groupes d'inertie (à conjugaison près) du  $\pi_1$ .

On considère donc des catégories de  $\mathbb{Q}$ -surfaces, dont les morphismes sont des  $\mathbb{Q}$ -morphisms.

#### Théorème [Pop]

Soit  $\mathcal{T}$  la catégorie constituée des  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$  privées d'un nombre fini de points rationnels et de tous les morphismes  $\mathbb{Q}$ -rationnels. Alors :

$$G_{\mathbb{Q}} \simeq \text{Out}^*(\mathcal{T}_{\pi}).$$

### 3.2 Principe des 2 niveaux

Suivant deux idées de Grothendieck, on considère la collection des espaces de modules de courbes de genre  $g$  à  $n$  points marqués  $\{\mathcal{M}_{g,n}\}_{g,n}$ .

#### Question 1 :

Quels morphismes entre espaces de modules  $\{\mathcal{M}_{g,n}\}_{g,n}$  faut-il imposer pour disposer d'une tour  $\mathcal{T}$  tel que

$$G_{\mathbb{Q}} \simeq \text{Out}^*(\mathcal{T}) \quad ?$$

Rappelons que la dimension de  $\mathcal{M}_{g,n}$  est  $3g - 3 + n$ , et remarquons que l'action de  $\widehat{GT}$  sur toutes les pièces  $\mathcal{M}_{0,[n]}$  est définie à partir des pièces de dimensions 1 et 2,  $\mathcal{M}_{0,4}$  et  $\mathcal{M}_{0,5}$ .

#### Question 2 : principe des 2-niveaux

L'action de  $\widehat{GT}$  et  $G_{\mathbb{Q}}$  sur tous les mapping class groups est-elle déterminée uniquement sur les composantes de dimension 1 et 2 ?

En ce qui concerne la tour  $(\mathcal{M}_{0,[n]})_n$  :

#### Théorème [Lochak-Schneps]



Soit  $\mathcal{T}$  la tour composée des espaces de modules  $\mathcal{M}_{0,[n]}$ , reliés par les morphismes d'inclusions  $i_n : B_n \rightarrow B_{n+1}$  et de «doublement de brins». Alors

$$\widehat{GT} \simeq \text{Out}^*(\mathcal{T}_\pi)$$

et le *principe des 2 niveaux* est vérifié.

### 3.3 La tour des $\{\Gamma_{g,n}^r\}$

#### 3.3.1 Espaces de module $\mathcal{M}_{g,n}$

Considérons le cas des espaces de modules de genre  $g$  à  $n$  points marqués  $\mathcal{M}_{g,n}$ .

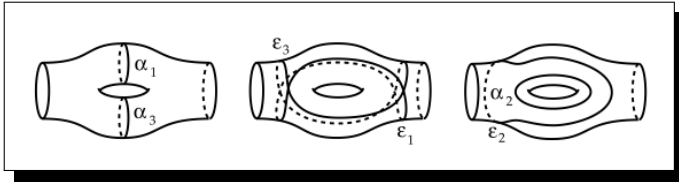
L'action de  $\widehat{GT}$  sur chacune des pièces  $\widehat{\Gamma}_{g,n}$  est une question ouverte.

En raisonnant à partir de  $G_{\mathbb{Q}}$ , on obtient une nouvelle relation (sous contraintes techniques)

#### Définition

Soit  $\mathbb{I}_0$  l'ensemble des éléments de  $\widehat{GT}$  vérifiant  $(\rho_2(F) = 0$  et  $\lambda = 1)$  la relation

$$f(e_3, a_1)f(a_2^2, a_3^2)f(e_2, e_3)f(e_1, e_2)f(a_1^2, a_2^2)f(a_3, e_1) = 1 \text{ dans } \widehat{\Gamma}_{1,2} \quad (IV)$$



Dans ce contexte

- La relation (II), dans  $\mathcal{M}_{0,[4]}$ , s'interprète dans  $\mathcal{M}_{1,1}$  ( $\mathcal{M}_{0,[4]} \simeq (\mathbb{P} - \{0, 1, \infty\})/\mathfrak{S}_4$ )
- La relation (IV) provient de l'action de  $G_{\mathbb{Q}}$  sur  $\widehat{\Gamma}_{1,2}$ .

Notons  $\mathbb{I}$  le groupe  $\mathbb{I}_0$  affranchie des conditions techniques. Alors, *Hatcher, Lochak, Nakamura et Schneps* ont montré :

#### Théorème

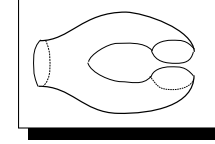
Les éléments de  $\mathbb{I}$  forment un sous-groupe de  $\widehat{GT}$ . Il contient  $G_{\mathbb{Q}}$  et de plus

$$\mathbb{I} \hookrightarrow \text{Out}^*(\widehat{\Gamma}_{g,n}) \quad \forall g, n$$

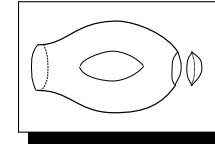
de façon compatible avec l'action de  $G_{\mathbb{Q}}$ .

En terme de tour, considérons  $\mathcal{T} = \{\mathcal{M}_{g,n}^r\}_{g,n,r}$ , où les surfaces topologiques comportent des bords. Les morphismes sont des morphismes :

- de fermeture de genre  $\widehat{\Gamma}_{g,n}^r \rightarrow \widehat{\Gamma}_{g+1,n}^{r-2}$



- d'effacement de bord  $\widehat{\Gamma}_{g,n}^r \rightarrow \widehat{\Gamma}_{g,n+1}^{r-1}$



Alors :

#### Théorème

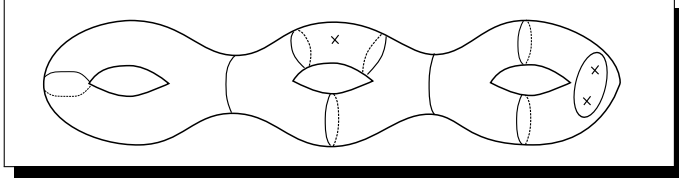
Le groupe  $\mathbb{I}$  respecte les morphismes de cette tour. On a

$$\mathbb{I} \hookrightarrow \text{Out}^*(\{\widehat{\Gamma}_{g,n}^r\}_{g,n,r}).$$

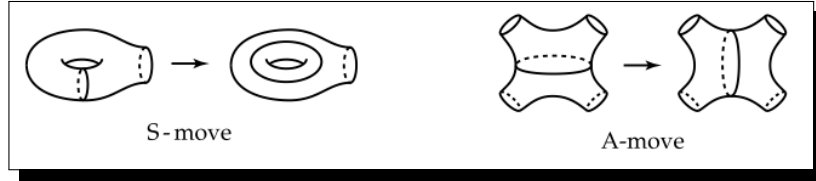
et le *principe des 2 niveaux* est vérifié.

#### 3.3.2 Un jeu de lego topologique

Soit une découpe en pantalon de  $S_{g,n}$  choisie arbitrairement



Deux découpes en pantalon diffèrent par une succession de mouvements  $A$  et  $S$



L'action de  $\mathbb{F}_0$  est alors explicitement donnée par

**Théorème**

Soit  $P$  une découpe en pantalon de  $S_{g,n}$ . Le morphisme  $\mathbb{F}_0 \rightarrow \text{Out}(\widehat{\Gamma}_{g,n})$  se relève en un morphisme

$$\psi_P : \mathbb{F}_0 \rightarrow \text{Aut}_P(\widehat{\Gamma}_{g,n})$$

donné par

1.  $\psi_P(F) : a \rightarrow a^\lambda$  pour  $\alpha \in P$
2.  $\psi_P(F) : b \rightarrow f(a, b)^{-1} b^\lambda f(a, b)$  si  $\alpha \rightarrow \beta$  est un mouvement  $A$ ,
3.  $\psi_P(F) : c \rightarrow f(a^2, c^2)^{-1} c^\lambda f(a^2, c^2)$  si  $\alpha \rightarrow \gamma$  est un mouvement  $S$ .

Le choix de  $P$  définit l'automorphisme à conjugaison près.

L'action de  $\mathbb{F}_0$  est alors explicitement donnée par

**Théorème**

Soit  $P$  une découpe en pantalon de  $S_{g,n}$ . Le morphisme  $\mathbb{F}_0 \rightarrow \text{Out}(\widehat{\Gamma}_{g,n})$  se relève en un morphisme

$$\psi_P : \mathbb{F}_0 \rightarrow \text{Aut}_P(\widehat{\Gamma}_{g,n})$$

donné par

1.  $\psi_P(F) : a \rightarrow a^\lambda$  pour  $\alpha \in P$
2.  $\psi_P(F) : b \rightarrow f(a, b)^{-1} b^\lambda f(a, b)$  si  $\alpha \rightarrow \beta$  est un mouvement  $A$ ,
3.  $\psi_P(F) : c \rightarrow f(a^2, c^2)^{-1} c^\lambda f(a^2, c^2)$  si  $\alpha \rightarrow \gamma$  est un mouvement  $S$ .

Le choix de  $P$  définit l'automorphisme à conjugaison près.

**3.3.3 Conclusion**

La suite exacte fondamentale, appliquée aux espaces de modules en genre 0, nous a permis d'obtenir

- une représentation calculable de  $G_{\mathbb{Q}}$  dans les groupes de tresses  $B_n$ ,
- un nouveau groupe  $\widehat{GT}$  qui encode des propriétés de  $G_{\mathbb{Q}}$ .

Les espaces de modules à bords  $\mathcal{M}_{g,n}^r$ , reliés entre eux par des morphismes topologiques, nous ont permis

- d'affiner le groupe  $\widehat{GT}$  en un nouveau groupe  $\mathbb{F}$ ,
- de présenter ce groupe  $\mathbb{F}$  comme respectant la combinatoire de la tour.

Le *principe des 2 niveaux* est vérifié pour les tours d'espaces de modules de genre 0 et de genre quelconque : le calcul de l'action galoisienne sur ces tours est simplifié puisque lisible sur les composantes de dimension 1 et 2.