Benjamin COLLAS
benjamin.collas@telaxo.com

# Mi-101 *Mathematica* 2004-2005

Correction : exercices fonctions réelles et suites de fonctions

## Continuité et dérivabilité

### ■ Exercice 1

Quelle condition imposer à *a* et *b* pour que la fonction *f1* suivante soit continue ?

$$f1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} a * \sin(x) + \cos(x) \text{ si } x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x \text{ si } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ x^2 + b \text{ sinon} \end{cases}$$

```
f1[x_] := If[x < Pi / 2, a * Sin[x] + Cos[x], If[x < Pi, Pi - x, x^2 + b]]
```

```
Limit[f1[x], x -> Pi / 2, Direction -> 1]
```

a

```
Limit[f1[x], x -> Pi / 2, Direction → -1]
```

$\frac{\pi}{2}$

```
Limit[f1[x], x -> Pi, Direction -> 1]
```

0

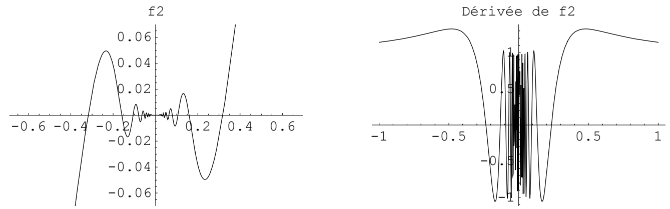
```
Limit[f1[x], x -> Pi, Direction → -1]
```

$b + \pi^2$



### ■ Exercice 2

```
gr1 = Plot[ff2[x], {x, -1, 1}, DisplayFunction → Identity, PlotLabel -> "f2"];
gr2 = Plot[dff2, {x, -1, 1}, DisplayFunction → Identity, PlotLabel -> "Dérivée de f2"];
Show[GraphicsArray[{gr1, gr2}], DisplayFunction → $DisplayFunction];
```




1) Prolonger en *0* la fonction *f2* par continuité.

$$f2: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0$$

```
f2[x_ /; x ≠ 0] := x^2 Sin[1 / x]
```

```
Limit[f2[x], x -> 0, Direction → -1]
```

Limit[f2[x], x → 0, Direction → -1]

Essayons autre chose :

```
ff2[x_] := x^2 Sin[1 / x]
```

```
Limit[ff2[x], x -> 0, Direction → -1]
```

0

```
Limit[ff2[x], x -> 0, Direction → 1]
```

0

On prolonge f2 par continuité en 0 en posant f2(0)=0.

2) La fonction prolongée est-elle dérivable en 0 ?

```
Limit[ff2[x] / x, x → 0]
```

0

La fonction est dérivable en 0 de dérivée nulle.

3) La dérivée est-elle est continue en *0* ?

```
dff2 = D[ff2[x], x]
```

$-\text{Cos}\left[\frac{1}{x}\right] + 2\,x\,\text{Sin}\left[\frac{1}{x}\right]$

```
Limit[dff2, x → 0, Direction → -1]

Interval[{-1, 1}]
```

La fonction dérivée n'admet pas de limite en 0 et n'est donc pas continue.

---

# Suites de fonctions

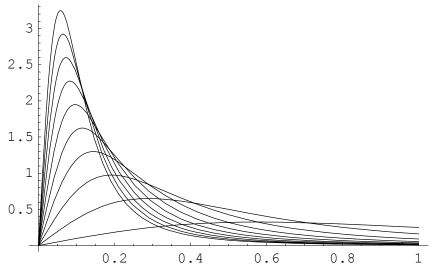
## ■ Exercice 1

1) Définir et tracer quelques éléments de la suite de fonction $(g_n\,(x))_{\mathbb{N}}$ suivante. Conjecturer la fonction limite puis vérifier votre conjecture par le calcul.

$$g_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{n^2\,x}{(1+n^2\,x^2)^2}$$

```
g[n_][x_] := n^2 x / (1 + n^2 x^2) ^2

Plot[Evaluate[Table[g[n][x], {n, 1, 10}]], {x, 0, 1}];
```




```
Limit[g[n][x], n → Infinity]

0
```

2) Calculer $I_k = \int_0^1 g_k(t)\,dt$. En déduire la valeur de $\lim_{k\to\infty} I_k$.
Quelle réaction de prudence en déduisez vous ? (on utilisera l'option *Assumptions).*

```
Ik = Integrate[g[k][x], {x, 0, 1}, Assumptions → k > 0]
```

$$\frac{k^2}{2+2\,k^2}$$

```
Limit[Ik, k → Infinity]
```

$$\frac{1}{2}$$

La limite des intégrales des fonctions de la suite vaut *1/2.* Pourtant la fonction limite est la fonction nulle donc d'intégrale nulle.



**Mesure de prudence :** en général, l'intégrale de la fonction limite n'est pas égale à la limite des intégrales des fonctions.

## ■ Exercice 2

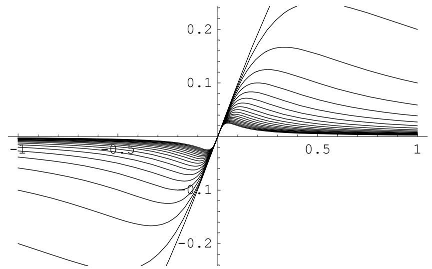
1) Définir et tracer quelques élément de la suite de fonction $(f_n\,(x))_{\mathbb{N}}$ suivante. Conjecturer la fonction limite puis vérifier votre conjecture par le calcul.

$$f_n : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{\frac{x}{1+(n x)^2}}$$

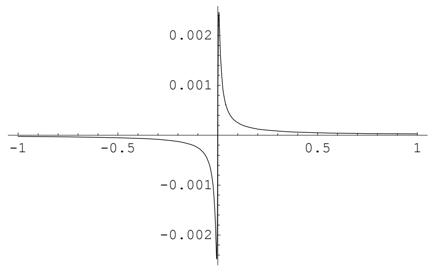
```
f[n_][x_] := x / (1 + n^2 x^2)
```

Attention, pas de conclusion trop précipitée.

```
Plot[Evaluate[Table[f[n][x], {n, 1, 20}]], {x, -1, 1}];
```




```
Plot[f[200][x], {x, -1, 1}];
```




La fonction limite semble donc bien être la fonction constante nulle, ce qui est bien confirmé par le calcul ci-dessous (ainsi qu'une vérification sur papier).

```
Limit[f[n][x], n → Infinity]

0
```

2) Calculer la valeur de la dérivée en *0* de $gg_k$. En déduire la limite de cette valeur.
Quelle mesure de prudence cela vous inspire-t-il ?

```
dergg = Simplify[D[f[n][x], x]] /. {x → 0}
```

```
1
```

Quelque soit la fonction de la suite, la valeur de la fonction dérivée en 0 vaut 1. Pourtant la fonction limite est la fonction constante nulle, donc de valeur de dérivée en 0 égale à 0.

> **Mesure de prudence :** en général, la dérivée de la fonction limite n'est pas égale à la limite de la dérivée des fonctions.

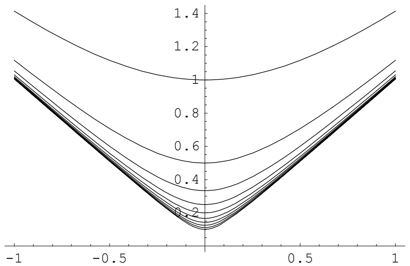
## ▪ Exercice 3

1) Définir et tracer quelques élément de la suite de fonction $(h_n(x))_{\mathbb{N}}$ suivante. Conjecturer la fonction limite puis vérifier votre conjecture par le calcul
(on utilisera les fonctions *Assuming* et *Element).*

$$h_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2} \end{array}$$

```
h[n_][x_] := Sqrt[1 / n^2 + x^2]
```

```
Plot[Evaluate[Table[h[n][x], {n, 1, 10}]], {x, -1, 1}];
```




```
Limit[h[n][x], n → Infinity]
```

$\sqrt{x^2}$

```
Assuming[Element[x, Reals], Limit[h[n][x], n → Infinity]]
```

```
Abs[x]
```

2) Calculer la valeur de la dérivée en *0* de $h_n(x)$. En déduire la limite de cette valeur lorsque *n* tend vers l'infini. Quelle mesure de prudence cela vous inspire-t-il ?

```
derhh = Simplify[D[hh[n][x], x]] /. {x → 0}
```

```
0
```



Quelque soit la fonction de la suite, la valeur de la fonction dérivée en 0 vaut 1. Pourtant la fonction limite est la fonction valeur absolue non dérivable en 0.

> **Mesure de prudence :** en général, la fonction limite n'est pas dérivable même si toutes les fonctions le sont.