
Mi-101 **Mathematica** 2004-2005
Exercices fonctions réelles et suites de fonctions

Continuité et dérivabilité

■ Exercice 1

Quelle condition imposer à a et b pour que la fonction f_1 suivante soit continue ?

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} a * \sin(x) + \cos(x) & \text{si } x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{si } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ x^2 + b & \text{sinon} \end{cases}$$

■ Exercice 2

1) Prolonger en 0 la fonction f_2 par continuité.

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0$$

2) La fonction prolongée est-elle dérivable en 0 ?

3) La dérivée est-elle continue en 0 ?

Suites de fonctions

■ Exercice 1

1) Définir et tracer quelques éléments de la suite de fonction $(g_n(x))_n$ suivante. Conjecturer la fonction limite puis vérifier votre conjecture par le calcul.

$$g_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto \frac{n^2 x}{(1 + n^2 x^2)^2}$$

2) Calculer $I_k = \int_0^1 g_k(t) dt$. En déduire la valeur de $\lim_{k \rightarrow \infty} I_k$.

Quelle réaction de prudence en déduisez vous ? (on utilisera l'option *Assumptions*).

■ Exercice 2

1) Définir et tracer quelques éléments de la suite de fonction $(f_n(x))_n$ suivante. Conjecturer la fonction limite puis vérifier votre conjecture par le calcul.

$$f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{\frac{x}{1 + (nx)^2}}$$

2) Calculer la valeur de la dérivée en 0 de $g g_k$. En déduire la limite de cette valeur. Quelle mesure de prudence cela vous inspire-t-il ?

■ Exercice 3

1) Définir et tracer quelques éléments de la suite de fonction $(h_n(x))_n$ suivante. Conjecturer la fonction limite puis vérifier votre conjecture par le calcul (on utilisera les fonctions *Assuming* et *Element*).

$$h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$$

2) Calculer la valeur de la dérivée en 0 de $h_n(x)$. En déduire la limite de cette valeur lorsque n tend vers l'infini. Quelle mesure de prudence cela vous inspire-t-il ?