Mi-101 *Mathematica* 2004-2005

Partiel - groupe C1-sujet 1

Tout document papier autorisé.
Téléphones portables et support informatique interdits.
Une attention particulière devra être portée à la rédaction.

Exercice 1 : cours

■ Listes

1) En utilisant *Range*, donner une commande permettant d'obtenir chacune des listes suivantes (on expliquera la propriété justifiant le résultat).

$\{0, \mathrm{Log}[2], \mathrm{Log}[3], \mathrm{Log}[4], \mathrm{Log}[5], \mathrm{Log}[6], \mathrm{Log}[7]\}$

Réponse :

$\{2\sqrt{3}, \sqrt{11}, \sqrt{10}, 3, 2\sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{6}, \sqrt{5}, 2, \sqrt{3}, \sqrt{2}, 1, 0, i, i\sqrt{2}\}$

Réponse :

$\{x+2y, 2x+3y, 3x+4y, 4x+5y, 5x+6y\}$

Réponse :

2) En utilisant *Table*, donner une commande permettant d'obtenir chacune des listes suivantes.

$\{(-3)^{toto}, (-2)^{toto}, (-1)^{toto}, 0^{toto}, 1, 2^{toto}, 3^{toto}\}$

Réponse :

$\{a^3-b^3, a^4-b^4, a^5-b^5, a^6-b^6, a^7-b^7\}$

Réponse :

$$\left\{\left\{\frac{a}{5}-b,\ \frac{a}{5}-b^2\right\},\ \left\{\frac{a}{6}-b,\ \frac{a}{6}-b^2\right\},\ \left\{\frac{a}{7}-b,\ \frac{a}{7}-b^2\right\}\right\}$$

Réponse :

■ Fonctions

1) Commenter le résultat suivant.

```
Re[{1, 1 + I, 2 + 3 * I, Sqrt[3] I}]
```

```
{1, 1, 2, 0}
```

Réponse :

2) On considère la fonction *CtoR* bien connue définie comme suit. Commenter les résultats suivants.

```
CtoR[z_] := {Re[z], Im[z]}
```

```
CtoR[{1, 1 + I, 2 + 3 * I, Sqrt[3] I}]
```

$$\left\{\{1,\ 1,\ 2,\ 0\},\ \left\{0,\ 1,\ 3,\ \sqrt{3}\right\}\right\}$$

Réponse :

```
Map[CtoR, {1, 1 + I, 2 + 3 * I, Sqrt[3] I}]
```

$$\left\{\{1,\ 0\},\ \{1,\ 1\},\ \{2,\ 3\},\ \left\{0,\ \sqrt{3}\right\}\right\}$$

Réponse :

3) Donner la commande à valider afin d'obtenir le résultat suivant

```
CtoR[{1, 1 + I, 2 + 3 * I, Sqrt[3] I}]
```

$$\left\{\{1,\ 0\},\ \{1,\ 1\},\ \{2,\ 3\},\ \left\{0,\ \sqrt{3}\right\}\right\}$$

Réponse :

Exercice 2 : arbres

■ Expressions

1) Tracer à la main l'arbre de décomposition de l'expression suivante.

$Log(\mid \frac{x+1}{x-1} \mid -argth(x))$

Réponse : sur feuille libre à joindre à ces feuilles

2) Donner l'expression *Mathematica* associée à l'arbre suivant :

```
Times[ |                                ,
       Plus[x, |       , |       ]
               Tan[a]    Tan[b]

 |                                                       ]
 Power[ |                                          , -1]
        Plus[1, |                              ]
                Times[-1, |                , |      ]
                          Tan[ |         ]  Tan[b]
                               Power[a, 2]
```

Réponse :

3) Quelle commande *Mathematica* vous permet de vérifier votre solution ?

Réponse :

■ Listes

On considère les listes suivantes :

liste1 :

```
{{{{1, 1}, {1, 1}, {1, 1}, {1, 1}, {1, 1}}, {{1, 1}, {1, 1}, {1, 1}, {1, 1}, {1, 1}}},
 {{{2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}}, {{2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}}},
 {{{3, 3}, {3, 3}, {3, 3}, {3, 3}, {3, 3}}, {{3, 3}, {3, 3}, {3, 3}, {3, 3}, {3, 3}}}}
```

liste2 :

```
{{{2 a + b}, {2 a + 2 b}, {2 a + 3 b}, {2 a + 4 b}}, {{3 a + b}, {3 a + 2 b}, {3 a + 3 b}, {3 a + 4 b}},
 {{4 a + b}, {4 a + 2 b}, {4 a + 3 b}, {4 a + 4 b}}, {{5 a + b}, {5 a + 2 b}, {5 a + 3 b}, {5 a + 4 b}}}
```

4) Quelle est la profondeur de *liste1* ? Compléter le tableau ci-dessous. En déduire pour *liste2* une commande renvoyant l'élément *3a+4b*.

Niveau	Nombres d'éléments
1	
2	
3	
4	
...	

Réponses :

5) Indiquer la commande utilisée pour obtenir le résultat suivant à partir de *liste1*.

```
{{1, 1}, {1, 1}, {1, 1}, {1, 1}, {1, 1}, {1, 1}, {1, 1}, {1, 1}, {1, 1}, {1, 1},
 {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2},
 {3, 3}, {3, 3}, {3, 3}, {3, 3}, {3, 3}, {3, 3}, {3, 3}, {3, 3}, {3, 3}, {3, 3}}
```

Réponse :

6) Donner les commandes *Mathematica* permettant de générer *liste1* et *liste2*.

Réponse :

Exercice 3 : approximation

■ Représentations de rationnels et d'irrationnels

1) Donner la forme adoptée par *Mathematica* pour représenter un rationnel (on donnera un exemple).

Réponse :

2) Expliquer brièvement pourquoi la représentation informatique d'un nombre rationnel est très simple.

Réponse :

3) Quelle différence *Mathematica* fait-il entre les expressions *Sqrt[2]* et *Sqrt[2.]* ?

Réponse :

4) Expliquer brièvement pourquoi la représentation informatique d'un nombre irrationnel pose problème.

Réponse :

■ Approximation d'un irrationnel

On considère la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ suivante définie par récurrence :

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 \\ u_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \end{aligned}$$

5) Créer une fonction *f* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et qui vérifie la propriété suivante :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Réponse :

6) En utilisant *NestList* établir une liste des 6 premières valeurs de $(u_n)_{\mathbb{N}}$. On nomme *val6* cette liste.

Réponse :

7) En étudiant la commande et le résultat associé reproduits ci-dessous, quelle conjecture pouvez-vous faire ?

```
N[val6]

{2., 1.5, 1.41667, 1.41422, 1.41421, 1.41421}
```

Réponse :

8) Donner une expression *Mathematica* qui permette d'obtenir la liste de valeurs *lisval* ci-dessous.

```
{Abs[u[1] - u[2]], Abs[u[2] - u[3]], Abs[u[3] - u[4]],
 Abs[u[4] - u[5]], Abs[u[5] - u[6]], Abs[-u[1] + u[6]]}
```

Réponse :

9) Ne connaissant pas la valeur de la limite, on cherche à connaitre le nombre de décimales exactes figurant dans u_4. Expliquer en quoi la commande précédente permet de répondre à cette question.

Réponse :

Combien de décimales exactes a-t-on dans u_4 (on pourra s'aider de la ligne ci-dessous représentant *lisval* dans laquelle on a substitué les valeurs de u[i] à leur expression) ?

$\{0.5,\ 0.0833333,\ 0.00245098,\ 2.1239\times10^{-6},\ 1.59486\times10^{-12},\ 0.585786\}$

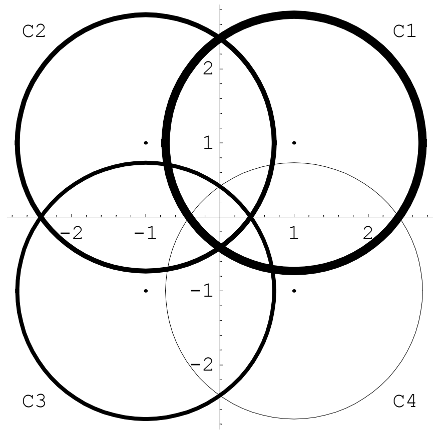
Réponse :

10) En remarquant que la suite ne prend que des valeurs rationnelles, expliquer en quoi ce qui précède apporte une réponse au problème soulevé en 4).

Réponse :

Exercice 4 : booléens

On considère dans cette partie les quatres cercles *C1, C2, C3* et *C4* de centre *(±1,±1)* et de rayon $\sqrt{3}$ suivants.



1) Donner l'équation cartésienne implicite de *C1*.

Réponse :

2) Créer une fonction booléenne *f1* qui renvoie *True* si un point *{x,y}* est dans l'intérieur du cercle *C1, False* sinon.

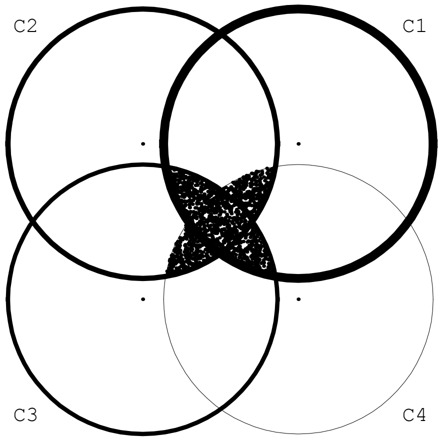
Réponse :

3) Créer une liste *tapis* contenant *5000* coordonnées aléatoires de points comprises entre *-1* et *1*.

Réponse :

On considère données des fonctions *f2, f3* et *f4* similaires à *f1* mais pour les cercles *C2*, *C3* et *C4* respectivement.

4) Utilisant les fonctions booléennes élémentaires et les fonctions *f1, f2, f3* et *f4,* construire une fonction *FF* qui renvoie *True* si un point *{x,y}* est dans la région grisée suivante.



Réponse :

5) Utilisant ce qui précède, créer une liste *ptSel* qui contienne les points de *tapis* contenus dans la région grisée.

Réponse :

6) Afficher ces points.

Réponse :