Mi-101 **Mathematica** 2003-2004

Partiel 2003 - durée 1 heure

Documents autorisés : notes de cours papier.
Il n'est permis aucun accès à des données enregistrées antérieurement sur support informatique (disquette, disque dur, cd-rom, messagerie internet...). L'usage du téléphone portable est interdit.
Mise en garde : le partiel se déroulant sur machine, l'élève est seul responsable de son travail. Il est *fortement* conseillé de sauvegarder régulièrement son devoir qui sera rendu sous forme imprimée en fin d'épreuve.

Il sera grandement tenu compte de la clarté de la rédaction et des explications.

Listes et fonctions

■ Listes

Etablir les commandes qui permettent d'obtenir les résultats suivants

$\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, 2\sqrt{2}, 3, \sqrt{10}\}$

$\{2, 5, 11, 17, 23, 31\}$

$\{1+\pi+x, 2+\pi+2x, 3+\pi+3x, 4+\pi+4x, 5+\pi+5x\}$

$\{1, 2x, 3x^2, 4x^3, 5x^4, 6x^5\}$

{{{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}}, {{2, 1}, {2, 2}, {2, 3}},
{{3, 1}, {3, 2}, {3, 3}}, {{4, 1}, {4, 2}, {4, 3}}, {{5, 1}, {5, 2}, {5, 3}}}

■ Fonctions

Créer les fonctions suivantes

f1 :
Qui à une liste *lis1*, une liste *lis2* et un élément *elem* associe la liste dont les éléments sont, dans l'ordre, les éléments de *lis1*, *elem*, puis les éléments de *lis2*.

f2:
Qui à une liste associe la liste formée des longeurs de ses éléments.

f3:
Qui à une liste associe la somme de ses troisième et quatrièmes éléments divisée par *2*.

f4:
Qui à une liste associe cette même liste dont on a jeté tous les éléments de position impaire.

f5:
Qui à un entier associe *True* si c'est un premier jumeau et *False* sinon.
NB : On dit qu'un entier est jumeau s'il est premier et si augmenté de *2* ou diminué de *2,* il est encore premier.

Exercice d'algèbre linéaire

Dans cet exercice, on se propose de trouver l'ensemble solution au système d'équations de paramètre *a* suivant. La discussion portera sur la valeur du paramètre ainsi que sur le vecteur *(x0,y0,z0)*.

$$\begin{array}{rrrcl} x & +5y & -z & = & x0 \\ -x & -2y & +az & = & y0 \\ & y & +az & = & z0 \end{array}$$

On considère pour cela l'application linéaire suivante:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x+5y-z, -x-2y+a*z, y+a*z) \end{array}$$

1) Questions préliminaires
 a) Ecrire en *Mathematica* la fonction *f*
 b) Ecrire en *Mathematica* la matrice *M* associée à *f*

2) Dans toute cette partie, on fixera *a=-1/2*

 a) Etude du noyau
  i) Trouver une base du noyau
  ii) Trouver un système d'équations minimal du noyau

 b) Etude de l'image
  i) Trouver un système d'équations minimal de l'image
  ii) f est-elle surjective ?
  Bonus : pouvait-on s'en douter ?

3) Dans toute cette partie, *a* redeviendra quelconque.
On prendra soin de bien fournir des réponses exhaustives en fonction des différentes valeurs du paramètre.

NB : on pourra utiliser *Clear[a]* pour effacer le contenu de *a*.

 a) Utilisant *Reduce*, trouver un système d'équations minimales du noyau.
 Discuter, en fonction du paramètre *a,* de l'unicité de la solution du système.

 b) Trouver un système d'équations minimales de l'image.
 En déduire, en fonction de la valeur du paramètre *a*, l'existence de solutions au système pour un *(x0,y0,z0)* donné.

 c) Utilisant les questions 3)a) et 3)b), donner en fonction de *a* l'ensemble solution du système.
 Bonus : on pourra repérer où intervient le noyau dans le cas où *f* n'est pas injective.

Exercice sur les booléens

▪ Tables de vérités

1) Grace à l'aide, expliquer en une phrase le sens de la fonction *Implies*

2) En utilisant *Outer,* fabriquer la table de vérité de *Implies.*

3) On considère maintenant les fonctions *fBool* et *fContra.*

```
fBool[x_, y_] := Or[Not[x], y]

fContra[x_, y_] := Implies[Not[y], Not[x]]
```

a) Expliquer pourquoi ce sont des fonctions booléennes
b) Donner les tables de vérité de ces deux fonctions. Que peut-on en conclure ?

▪ Methode de Monte-Carlo

On se propose dans cet exercice d'approximer $\pi/4$ par une méthode probabiliste.
On considère pour cela la région, notée *A,* comprise entre le cercle de rayon *1* et de centre *O*, et les parties positives des axes *(Ox)* et *(Oy)*.

1) Créer une fonction qui, aux coordonnées d'un point du plan, associe *True* ou *False* selon que le point appartienne à la région *A* ou non.

2) Générer une liste *pts* de *2000* points aléatoires pris dans le carré *C=[0,1]x[0,1]*.

3) Sélectionner parmi ces points ceux qui sont dans *A*. On nommera *ptsInA* cette nouvelle liste de coordonnées.
Afficher graphiquement cet ensemble de points.

4) Utilisant *pts* et *ptsInA*, calculer la probabilité *prob* qu'un des points de *pts* tiré soit dans la région *A*. On en donnera une approximation.

5) En utilisant les aires des régions *A* et *C,* calculer de manière théorique la probabilité *prob.*
En déduire une valeur approchée de $\pi/4$.