Feuille de colles n° 3
Séries numériques

Exercice 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_n = \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}.$$

Calculer la valeur de la série de terme général (u_n).
Indication : on pourra comparer le terme général de la série à une intégrale.

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt[n]{n}}.$$

Discuter de la nature de la série de terme général (u_n).

Exercice 3 : Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b} \end{cases}$$

Discuter de la nature de la série de terme général (u_n). Calculer la somme dans les cas de convergence.

Exercice 4 :

i) Considérons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ et notons V_n la somme partielle de la série de terme général v_n. Montrer que

$$\sum_{k=p}^{q} u_k v_k = \sum_{k=p}^{q-1} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_q V_q - u_p V_{p-1}.$$

ii) En déduire que si la suite (u_n) tend vers 0 en décroissant et si (V_n) est bornée alors la série de terme général $(u_n v_n)$ converge.

iii) Discuter de la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{\cos(nx)}{n\log(n)} \text{ où } x \neq 0 \mod 2\pi.$$

Bonus

Les inscrits ayant terminé leur exercice avant la fin du temps de préparation imparti doivent choisir un exercice supplémentaire.

Inscrits	
Étudiant 1	Exercice 1
Étudiant 2	Exercice 2
Étudiant 3	Exercice 3
Étudiant 4	Exercice 4
Étudiant 5	Exercice 1
Étudiant 6	Exercice 2