Feuille de colles n° 2
Dérivabilité - formules de Taylor - convexité

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonction convexe.

i) Montrer que $l = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$;

ii) Montrer que si $l \in \mathbb{R}$, alors $l' = \lim_{x\to\infty} f(x) - lx$ existe ;

iii) Si l et l' sont dans $\mathbb{R}$, en déduire l'asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que si f est majorée elle est constante.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} telles que f et $f^{(n+1)}$ soient bornées.
Montrer que $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ sont aussi bornées.
Indication : on pourra utiliser l'équivalence entre les normes $||.||_1$ et $P \mapsto \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$ pour conclure.

Exercice 4 : Soient $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $1/p + 1/q = 1$. Montrer que pour tous réels positifs $a_1, a_2, \cdots, a_n$ et $b_1, b_2, \cdots, b_n$ on a

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant (\sum_{i=1}^n a_i^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^n b_i^q)^{1/q}$$

Indication : on pourra se ramener à une inégalité dont un des membre est normalisé à 1.

Bonus

Exercice 1 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c)$$

Exercice 2 : Soit ϕ l'application qui à $x \in \mathbb{R}^*$ associe

$$A_x = \{\theta_x \in [0,1] |\sin(x) = x - \frac{x^3}{6}\cos(\theta_x x)\}.$$

i) Montrer que A_x est non-vide ;

ii) Montrer que pour x suffisament petit, A_x est réduit à un point y_x ;

iii) Calculer $\lim_{x\to 0} y_x$.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f est convexe si et seulement si $f(\frac{x+y}{2}) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

Inscrits

E. Faustine .... Exercice 1

G. Gaël .... Exercice 2

C. Vanessa .... Exercice 3

C. Juliette .... Exercice 4

C. Cathia .... Exercice 3

M. Muiri .... Exercice 2

Benjamin Collas • *Email :* collas@math.jussieu.fr