Feuille de colles n° 1
$\mathbb{R}$ - suites numériques - continuité - formules de Taylor

Les réponses aux questions de cours devront être accompagnées d'une rapide justification (théorème, démonstration, contre-exemple,...).

Élève 1

Question de cours (5 mn) : Soient $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles. Rappeler la définition de la borne supérieur de A. Selon que $B = \mathbb{N}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, A admet-elle toujours une borne supérieure ?

Exercice : Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue telle que $l = lim_{x\to\infty}(f(x+1) - f(x))$. Montrer que $lim_{x\to\infty} f(x)/x = l$.

Jérémie T.

Question de cours (5 mn) : Rappeler le théorème de Bolzano-Weierstrass. Caractériser les suites convergentes à l'aide de leur valeur d'adhérence (exemple de non-convergence) ?

Exercice : Soit $f \in C(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ dérivable de dérivée positive et décroissante.

i) Montrer que la suite $u_n = \sum_{i=1}^n f'(i) - f(n)$ est convergente ;
ii) En déduire un équivalent en $+\infty$ de $\sum_{i=1}^n f'(i)$;
iii) Donner un équivalent de la suite $\alpha_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \log(n)$.

Nolwenn G.

Question de cours (5 mn) : Rappeler la définition d'une suite de Cauchy. Une suite convergente est-elle de Cauchy ? Réciproque ?

Exercice : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uniformeément continue telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la suite $(f(n+x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Montrer que

$$lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Marc D.

Question de cours (5 mn) : Sous quelles hypothèse une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet-elle un développement de Taylor-Lagrange à l'ordre n en un point x_0 ? De Taylor-Young ? Y a-t-il unicité d'un développement limité au voisinage d'un point ? Un tel développement caractérise-t-il la fonction ?

Exercice : Soient $A, B \in \mathbb{R}^+$ non-vides et majorées. Considérons $A.B = \{z = xy \ x \in A \ y \in B\}$. Montrer que

$$sup(A.B) = sup(A)sup(B).$$

Armel deB.

Question de cours (5 mn) : Rappeler la définition d'une fonction uniformément continue ainsi que le théorème de Heine. Donner un exemple de fonction continue et non-uniformément continue.

Exercice : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Considérons la suite $v_n = \frac{u_1+\cdots+u_n}{n}$.

i) Montrer que si $u_n \to l$ alors $v_n \to l$;

ii) Montrer que si $(u_{n+1} - u_n) \to l$ alors $u_n/n \to l$;

iii) Montrer que si $u_{n+1}/u_n \to l$ alors $(u_n)^{1/n} \to l$;

Emeline D.

Question de cours (5 mn) : Énoncer le théorème des accroissements finis. Ce théorème reste-t-il vrai si f est à valeur dans $\mathbb{C}$?

Exercice : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_{n+1} = 4u_n - u_n^2.$$

i) Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire que la suite est périodique ssi $u_0 \in]0, 4\pi[$;

ii) Trouver u_0 tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit de période 2 ;

iii) Pour $u_0 \in]0, 4\pi[$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se met sous la forme $u_n = 4\sin^2(2^n\alpha)$ où $\alpha \in]0, \pi/2[$;

iv) Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer u_0 tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit de période p.

Bonus

En cas de temps supplémentaire, choisir un exercice parmi les énoncés suivants.

Exercice : Montrer que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice : Soit ϕ l'application qui à $x \in \mathbb{R}^*$ associe

$$A_x = \{\theta_x \in [0,1] | \sin(x) = x - \frac{x^3}{6}\cos(\theta_x x)\}.$$

i) Montrer que A_x est non-vide ;

ii) Montrer que pour x suffisament petit, A_x est réduit à un point y_x ;

iii) Calculer $\lim_{x\to 0} y_x$.

Exercice : Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_{n+1} = e^{1-u_n}.$$

Indication : on définiera une fonction $f : x \to e^{1-x}$ et l'on étudiera $g = f \circ f$.